111 UN RECORRIDO DE MATEMÁTICA PARA ECONOMISTAS A TRAVÉS DEL MODELO DE MERCADO

Ballestero, Gonzalo – Herrera, Pablo Matías
Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires
gonzaloballestero@economicas.uba.ar – pabloherrera@economicas.uba.ar

Especialidad: Educación Matemática

Palabras Clave: Economía Matemática, Modelo de Mercado.

Resumen

El manejo del instrumental matemático es un requisito central para la formación del economista, pues permite el análisis basado en esquemas de pensamiento lógico y la comprensión de realidades económicas. A partir de esta necesidad, el objetivo de la asignatura Matemática para Economistas es que el alumno desarrolle la capacidad de abstracción para formular problemas económicos en un lenguaje formal y abordarlos deductivamente desde el rigor y la conceptualización específica de las matemáticas. Dentro de la asignatura se distinguen cuatro unidades temáticas comunes a todos los programas de la materia correspondientes a la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires: "Elementos de Topología y Equilibrio", "Optimización estática", "Sistemas de Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias" y "Optimización Dinámica".
Dado este esquema, el objetivo de este trabajo es realizar un recorrido de Matemática para Economistas presentando el modelo de mercado como hilo conductor para articular los diferentes conceptos asociados a cada unidad temática. Para abordar esta cuestión, el trabajo está organizado de la siguiente manera. En la primera sección se explica el recorrido. En la segunda sección se utiliza la teoría de la optimización clásica para construir el modelo de mercado. En la tercera sección, se demuestra la existencia del equilibrio de mercado y luego se realiza un análisis estático comparativo del mismo. En la cuarta sección se considera la dimensión temporal y se analiza estabilidad dinámica. En la quinta sección se formula el problema de optimización intertemporal. Finalmente se presentan las conclusiones y oportunidades de investigación futura.

1 Introducción

La economía matemática es un método utilizado en el análisis económico que consiste en el empleo de símbolos matemáticos para enunciar problemas y se basa en teoremas matemáticos para auxiliarse en el razonamiento (Chiang & Wainwright, 2006). De este modo, el manejo del instrumental matemático es un requisito central para la formación del economista, pues permite el análisis basado en esquemas de pensamiento lógico y la comprensión de realidades económicas. A partir de esta necesidad, el objetivo de la asignatura Matemática para Economistas es que el alumno desarrolle la capacidad de abstracción para formular problemas económicos en un lenguaje formal y abordarlos deductivamente desde el rigor y la conceptualización específica de las matemáticas. Debido a que en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires la materia se ubica en el Ciclo Profesional de las carreras de Licenciatura en Economía y Actuario, también se espera que el alumno integre los conocimientos adquiridos en las otras asignaturas del ciclo matemático (Álgebra, Análisis Matemático I y II) y los articule con nuevos conceptos de topología, de optimización y de análisis dinámico tanto en tiempo continuo como discreto. Dentro de la asignatura se distinguen cuatro unidades temáticas comunes a los programas de las tres cátedras que actualmente dictan Matemática para Economistas en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires: "Elementos de Topología y Equilibrio", "Optimización estática", "Sistemas de Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias" y "Optimización Dinámica".

Dado este esquema, el objetivo de este trabajo es realizar un recorrido de Matemática para Economistas presentando el modelo de mercado como hilo conductor para articular los diferentes conceptos matemáticos asociados a cada unidad temática. De este modo, el modelo de mercado se presenta como un ejercicio para que el alumno sea capaz de integrar y establecer conexiones entre las diferentes herramientas matemáticas de manera tal que se consolide en un aprendizaje significativo. A diferencia del recorrido tradicional que consiste en introducir los conceptos matemáticos y después aplicarlos a la resolución de uno o varios modelos económicos, en este trabajo se presenta un recorrido alternativo que se basa en abordar un mismo modelo mediante diferentes herramientas matemáticas.

Para abordar esta cuestión, el trabajo está organizado de la siguiente manera. En la segunda sección se utiliza la teoría de la optimización clásica para construir el modelo de mercado. En la tercera sección se presenta el modelo. En la primera parte de esta sección se demuestra la existencia del equilibrio de mercado utilizando nociones básicas de topología. Seguido a esto, en la segunda parte de esta segunda esta sección, se realiza un análisis estático comparativo. En la cuarta sección se considera la dimensión temporal y se analiza estabilidad dinámica mediante la teoría de las ecuaciones diferenciales y en diferencias. En la quinta sección formula el problema de optimización intertemporal. En la primera parte de esta sección se utiliza la teoría del control óptimo para resolver el problema y en la segunda parte se obtiene solución empleando herramientas de programación dinámica discreta. Finalmente se presentan las conclusiones y oportunidades de investigación futura.

2 Optimización estática

La economía se define como la ciencia social que estudia el comportamiento humano como una relación entre fines y medios escasos que tienen usos alternativos. Debido a esta escasez, los individuos se enfrentan al problema de elegir la mejor opción dentro de un conjunto de alternativas posibles de acuerdo a un criterio de optimalidad. En el caso del consumidor, por ejemplo, el problema consiste en elegir una canasta de bienes que maximice su utilidad dada su restricción presupuestaria determinada por su ingreso y un vector de precios. Análogamente, el problema del productor consiste en elegir una combinación de insumos y productos que maximice su beneficio sujeto al estado de la tecnología y los precios de cada insumo y cada uno de los productos que oferte en el mercado.

En este sentido, el problema económico puede ser considerado como un problema de optimización estática sujeto a restricciones de igualdad (Intriligator, 2002). Este se define como un problema de decisión que consiste en encontrar la mejor solución dentro de un conjunto de alternativas posibles. Así pues, por optimizar se entiende maximizar o minimizar un objetivo determinado considerando las limitaciones establecidas por una o más restricciones. De este modo, el problema del consumidor y del productor pueden ser formalizados mediante la siguiente estructura matemática

$$\max f(x) \quad s.a \quad g(x) = b \tag{1}$$

donde f es la función objetivo y el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = b\}$ denota el conjunto soluciones factibles, el cual es cerrado y acotado. Generalmente, en economía se suele asumir que la función objetivo es dos veces continuamente diferenciable y estrictamente cóncava. Por lo tanto, la solución del problema (1) verifica existencia y unicidad. Por el teorema de los multiplicadores de Lagrange, la solución puede ser caracterizada de la siguiente manera

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1, \dots, n \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = b - g(x) = 0 \tag{3}$$

Dada la estricta concavidad de la función objetivo, las expresiones (2) y (3) son condiciones necesarias y suficientes de optimalidad.

En el caso del consumidor, la solución de este problema es la función de demanda $x_i(p,b)$, que indica la canasta de consumo del i-éstimo consumidor para cada combinación de precios e ingreso disponible. De la misma manera, para el caso del productor la solución es la función de oferta $y_i(p)$, que especifica qué cantidad produce el i-ésimo productor para cada vector precios. Tanto la función de demanda como la función de oferta se asumen continuas y homogéneas de grado cero. La intuición económica detrás de esta propiedad es que los agentes no padecen ilusión monetaria, de modo que lo único que consideran para tomar la decisión de consumo es la relación de precios relativos.

3 Elementos de topología y equilibrio

3.1 El modelo de mercado y la existencia del equilibrio

La economía, además de estudiar el comportamiento individual de los agentes económicos, también analiza la interacción entre los mismos que tiene lugar durante proceso de intercambio de n bienes. Para estudiar esta situación, a partir de la sumatoria de los comportamientos individuales, se construye un modelo de mercado conformado por la función de demanda agregada Q_i^d y la función de oferta agregada Q_i^s para cada bien i

$$Q_i^d(p,b) = \sum_{j=1} x_j(p,b) \quad \text{y} \quad Q_i^s(p) = \sum_{j=1} y_j(p) \qquad i = 1, \dots, n \tag{4}$$

donde $p = (p_1, \dots, p_n)$ denota el vector de precios de los n bienes y b indica el ingreso de los consumidores. La diferencia entre ambas funciones da como resultado una función Z_i denominada función de exceso de demanda agregada

$$Z_i(p) = Q_i^d(p,b) - Q_i^s(p) \qquad i = 1, \dots, n \tag{5}$$

La expresión $Z_i(p)$ indica que para el nivel de precios p existe un exceso de demanda negativo o positivo del bien i, según sea el caso. Nótese que b no está dentro del argumento de la función Z debido a que se lo considera constante.

Por propiedades de la sumatoria de funciones, la función de exceso de demanda agregada es continua y homogénea de grado cero. Además, es posible demostrar que las Z_i satisfacen una propiedad conocida como *Ley de Walras,* la cual se establece que para todo vector de precios se verifica que $pZ(p) = 0$. Así pues, el modelo de mercado queda reducido a la expresión (5).

La solución del modelo es un estado de equilibrio, es decir, un conjunto de variables interrelacionadas entre sí que conforman una situación caracterizada por la falta de una tendencia inherente al movimiento. Específicamente, el estado de equilibrio del modelo de mercado es un par de precios y cantidades tal que cada consumidor maximiza su utilidad dada su restricción presupuestaria, cada productor maximiza su beneficio sujeto a su restricción tecnológica y el exceso de demanda de cada bien intercambiado sea igual a cero. De este modo, como todos los agentes llevan a cabo su plan de acción óptimo, no existen incentivos a modificar su comportamiento. Por lo tanto, se dice que un estado de equilibrio es una situación de reposo. Matemáticamente, la cuestión de la existencia del equilibrio se refiere a la existencia de un vector p^* tal que $Z_i(p^*) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Utilizando el teorema del punto fijo de Brouwer se demuestra que si la función exceso de demanda agregada es continua, homogénea de grado y satisface la Ley de Walras, entonces existe al menos un vector de precios de equilibrio. Esta demostración ilustra el hecho de que la aplicación de técnicas matemáticas abstractas resulta indispensable para resolver problemas centrales de la teoría económica (Sydsæter et. al., 2005).

3.2 Análisis estático comparativo del equilibrio

Como se mencionó en la sección anterior, un estado de equilibrio es un estado de reposo que se basa en el balance de las fuerzas internas del modelo mientras los factores externos se mantienen inalterados. En caso de existir alguna perturbación por parte de los factores externos, habrá un nuevo equilibrio definido en base a los nuevos valores de los parámetros y variables exógenas del modelo.

Frecuentemente, en economía se está interesado en analizar cómo varían los valores de equilibrio de las variables endógenas ante un cambio en los parámetros o variables exógenas. Por este motivo, se utiliza el método de la estática comparativa. Conceptualmente, éste consiste en comparar el estado de equilibrio inicial (precambio) con el estado de equilibrio final (poscambio) y determinar la variación de los valores de equilibrio de las variables endógenas. Matemáticamente esto es equivalente a determinar la tasa de cambio del valor de equilibrio de una variable endógena respecto al cambio en un parámetro particular o variable exógena.

En el modelo de mercado planteado anteriormente, resulta plausible estudiar cómo cambian los valores de los precios de equilibrio p_i^* ante un aumento del ingreso de los consumidores b. Para responder a esta cuestión, considere las funciones de demanda y oferta agregada obtenidas en la sección anterior

$$\begin{aligned} Q_i^d &= Q_i^d(p_1, \dots, p_n, b) \\ Q_i^s &= Q_i^s(p_1, \dots, p_n) \end{aligned} \qquad i = 1, 2, \dots, n \tag{6}$$

donde $(p_1, \dots, p_n)$ es el vector de variables endógenas y b es considerada una variable exógena. En vista de los subíndices, estas dos expresiones denotan las $2n$ funciones que describen el comportamiento de la demanda y la oferta de cada bien. El modelo queda completamente especificado con las n condiciones de equilibrio

$$Q_i^d - Q_i^s = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n \tag{7}$$

Al sustituir (6) en (7) el modelo se reduce a un conjunto de n ecuaciones simultáneas

$$Q_i^d(p_1, \dots, p_n, b) - Q_i^s(p_1, \dots, p_n) = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n \tag{8}$$

De este modo, se obtiene un sistema de n funciones

$$Z_i(p_1, \dots, p_n, b) = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n \tag{9}$$

Como se mencionó en la sección anterior, existe un punto (p^*, b) que satisface (9) y todas las funciones $Z_1, \dots, Z_n$ son continuamente diferenciables. De este modo, es posible diferenciar completamente el sistema con respecto a sus variables endógenas y exógenas. A partir de esto, se construye un sistema de ecuaciones donde las incógnitas son las tasas de cambio del valor de equilibrio de los precios de mercado con respecto al cambio en el ingreso. Asumiendo que el siguiente determinante jacobiano es distinto de cero

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial Z_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial Z_1}{\partial p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial Z_n}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial Z_n}{\partial p_n} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (10)$$

Por el teorema de la función implícita y aplicando la regla de Cramer se obtiene la expresión analítica de la tasa de cambio del valor de equilibrio del precio del bien i respecto al cambio en b

$$\frac{dp_i^*}{db} = \frac{|J_i|}{|J|} \qquad i = 1, 2, \dots, n \qquad (11)$$

En ausencia de información adicional acerca del signo de los $\frac{\partial Z_i}{\partial p_j}$ y $\frac{\partial Z_i}{\partial b}$ no es posible conocer los signos de estas derivadas estático-comparativas. Esto significa que a medida que aumenta el ingreso de los consumidores los precios de equilibrio p_i^* puede aumentar o disminuir. Esto depende si el bien i es un bien inferior o un bien normal.

Si bien el análisis estático comparativo resulta útil porque permite efectuar predicciones acerca del comportamiento de los agentes económicos ante variaciones en los factores externos, en algunos aspectos resulta restrictivo debido a que no considera el proceso de ajuste en virtud del cual se pasa de un equilibrio a otro, así como tampoco la posibilidad de que el nuevo equilibrio sea inestable. El estudio del proceso de ajuste per se pertenece al campo de la dinámica económica, el cual se presentará en la sección que sigue a continuación.

4 Sistemas de ecuaciones diferenciales y en diferencias

Para analizar el proceso de ajuste de un estado de equilibrio inicial a un estado de equilibrio final y si éste es estable o no se utiliza el análisis dinámico. El objetivo del mismo es estudiar las trayectorias específicas en el tiempo de las variables endógenas del modelo así como determinar si, dado un tiempo suficiente, estas variables tenderán a converger al estado de equilibrio. En un análisis dinámico, la variable temporal puede considerarse como una variable continua o una variable discreta. Según sea el caso, el proceso de ajuste se modelizará como una ecuación diferencial o una ecuación en diferencias, respectivamente.

Por simplicidad considere el mercado de un bien en particular de modo que $n = 1$ y suponga que las funciones de demanda y oferta agregada son lineales

$$\begin{aligned} Q^d &= \alpha - \beta p \\ Q^s &= -\gamma + \delta p \end{aligned} \qquad \text{con} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0 \qquad (12)$$

El precio de equilibrio se encuentra igualando oferta y demanda y resulta ser $p^* = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$. Hasta aquí, el modelo descrito por las dos ecuaciones es estático, pero si se introduce el supuesto adicional de que el precio p es una función del tiempo t, el modelo cambia su carácter y se convierte en un modelo dinámico. Dado que la economía no es un sistema cerrado, sino que constantemente está sujeta a shocks exógenos, resulta plausible analizar si ante una perturbación en el estado de equilibrio es posible que la economía retorne nuevamente al punto p^* en un período de tiempo lo suficientemente extenso. Para abordar esta cuestión, se postula un mecanismo de ajuste de mercado según el cual si el exceso de demanda del bien i es positivo, entonces el precio de éste bien aumenta. Caso contrario, si el exceso de demanda del bien i es negativo, el precio disminuye. De este modo, la tasa de cambio del precio respecto al tiempo es directamente proporcional al exceso de demanda. Esta hipótesis puede expresarse como una ecuación diferencial o una ecuación en diferencias de la siguiente manera

$$\dot{p}_t = \theta\left(Q_t^d - Q_t^s\right) \quad \text{o} \quad p_{t+1} = \theta(Q_t^d - Q_t^s) \tag{13}$$

donde $\theta > 0$ representa un coeficiente de ajuste. La expresión (13) especifica cómo cambia el valor $p(t)$ en el tiempo. En virtud de las funciones de oferta y demanda de (12), es posible expresar (13) específicamente en la forma

$$\dot{p} + \theta(\beta + \delta)p_t = \theta(\alpha + \gamma) \quad \text{o} \quad p_{t+1} + \theta(\beta + \delta)p_t = \theta(\alpha + \gamma) \tag{14}$$

Luego de operar matemáticamente se obtiene que la solución es la trayectoria temporal del precio

$$p(t) = (p_0 - p^*)e^{-\theta(\beta+\delta)t} + p^* \quad \text{o} \quad p(t) = (p_0 - p^*)[-\theta(\beta + \delta)]^t + p^* \tag{15}$$

El problema de la estabilidad equivale a preguntarse si el primer término de cada ecuación en la expresión (15) tiende a cero a medida que t tiende a infinito. En el caso de la ecuación diferencial, esto se verifica si la raíz es negativa. En vista de que $\theta(\beta + \delta) > 0$, entonces se satisface la condición de estabilidad. A su vez, para el caso de la ecuación en diferencias la condición de estabilidad exige que el módulo de la raíz sea menor a uno. Por este motivo, para que el sistema sea dinámicamente estable debe satisfacerse que $\theta(\beta + \delta) < 1$. Si se verifica esta relación, entonces la trayectoria temporal del precio $p(t)$ converge al estado de equilibrio p^*. En consecuencia, se dice que el sistema es dinámicamente estable.

5 Optimización intertemporal

Como se mostró en la primera sección, el comportamiento del consumidor puede modelarse mediante técnicas de optimización estática. De este modo, se obtiene la función de demanda para un período de tiempo particular. Sin embargo, este enfoque presenta algunas limitaciones. En general, cuando un agente toma una decisión, considera las consecuencias de sus decisiones presentes sobre su bienestar futuro. La decisión óptima en un contexto dinámico no se obtiene mediante una secuencia de las decisiones estáticas óptimas para cada uno de los períodos que constituyen dicho contexto dinámico (Cerdá Tena, 2001). La utilización de técnicas de optimización intertemporal permite obtener la solución óptima. En particular, en esta sección se utilizarán dos técnicas, a saber, control óptimo y programación dinámica discreta, según la variable temporal sea continua o discreta, respectivamente.

5.1 Control óptimo

Considere un individuo que vive T períodos y posee un *stock* de ahorros inicial igual a s_0. Supóngase que desea consumir toda su riqueza a lo largo de su vida, de modo que $s(T) = 0$. Dada una tasa de interés r y una senda de consumo c, la evolución del ahorro s a lo largo del tiempo está determinada de acuerdo a la siguiente ecuación

$$\dot{s} = rs - c \tag{16}$$

Supóngase que las preferencias del individuo están dadas por una función de utilidad $u(c) = \ln(c)$. Para determinar la trayectoria óptima del consumo[15] el agente maximiza la suma de utilidades futuras descontadas por una tasa de descuento subjetivo δ sujeto a la evolución del ahorro, su riqueza inicial y su riqueza final

$$\max_{c(t)} \; U = \int_0^T \ln(c) e^{-\delta t}\, dt \quad s.a \quad \dot{s} = rs - c \quad \text{con} \quad s(0) > 0 \text{ y } s(T) = 0 \tag{17}$$

donde el consumo c es la variable de control y el ahorro s es la variable de estado. Luego de aplicar el teorema del principio del máximo de Pontryagin y operando algebraicamente se deduce la ecuación de Euler

$$\dot{c} = c(r - \delta) \tag{18}$$

La interpretación de esta expresión indica que la evolución del consumo a lo largo del tiempo dependerá del valor relativo de la tasa de interés con respecto a la tasa de descuento. Para hallar la trayectoria óptima del consumo se debe resolver la ecuación de Euler de manera tal que se obtiene

$$c = A_1 e^{(r-\delta)t} \tag{19}$$

Dado que la función de utilidad es cóncava y la restricción es lineal, por el teorema de Mangasarian se verifica la condición de suficiencia y se comprueba que (19) resuelve el problema de la maximización del funcional objetivo.

5.2 Programación dinámica discreta

En caso que la variable tiempo sea discreta, cada agente maximiza el valor presente del flujo de utilidad descontada por el factor de descuento β en el horizonte temporal

$$\max_{c(t)} \; U = \sum_{t=0}^{T} \ln(c) \beta^t \quad s.a \quad s_{t+1} = (1 + r)(s_t - c_t) \; \forall\, t = 0,1,2, \ldots, T \; \text{ con } \; s(0) > 0 \text{ y } s_{T+1} = 0 \tag{20}$$

Luego de plantear la ecuación de Bellman a valor presente y operar algebraicamente, se obtiene la ecuación de Euler

$$c_{t+1} = \alpha\beta c_t \tag{21}$$

donde $\alpha = (1 + r)$. Nótese que la ecuación de Euler es equivalente a la siguiente expresión

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial c_t}}{\dfrac{\partial u}{\partial c_{t+1}} \beta} = 1 + r \tag{22}$$

El lado izquierdo de la ecuación representa la tasa marginal de sustitución entre consumo presente y consumo futuro, e indica cuánto valora el consumidor en términos relativos una unidad de consumo de un período a otro. El lado derecho representa la tasa de interés bruta $(1 + r)$, es decir, cuánto se valora en el mercado financiero una unidad de consumo de un período a otro. En el equilibrio, las dos valoraciones deben ser iguales. De lo contrario, la asignación de consumo no sería óptima.

Para hallar la trayectoria óptima del consumo se resuelve la ecuación de Euler y se obtiene

$$c_t = A_1 (\alpha\beta)^t \tag{23}$$

[15] Dado que las decisiones de consumo y ahorro son interdependientes, a partir de la trayectoria óptima del consumo se sigue inmediatamente la trayectoria óptima del ahorro.

Dado que la función de utilidad es cóncava y la restricción es lineal, se satisface la condición de segundo orden y se comprueba que la expresión (23) resuelve el problema de la maximización del funcional objetivo.

6 Conclusiones y oportunidades de investigación futura

En este trabajo se realizó un recorrido de Matemática para Economistas presentando el modelo de mercado como hilo conductor para articular los diferentes conceptos matemáticos asociados a distintas unidades temáticas comunes a todos los programas de la asignatura correspondientes a la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires. De este modo, se presentó el modelo de mercado como un ejercicio para que el alumno sea capaz de integrar y establecer conexiones entre las diferentes herramientas matemáticas de manera tal que se consolide en un aprendizaje significativo.

El aporte de este trabajo ha sido presentar un recorrido alternativo basado en el estudio de un mismo modelo económico (a saber, el modelo de mercado) mediante diferentes herramientas matemáticas, a diferencia del recorrido tradicional que consiste en introducir los conceptos matemáticos y después aplicarlos a la resolución de uno o varios modelos económicos inconexos. Para terminar, este trabajo puede ser motivador de futuras investigaciones en lo que respecta al diseño de nuevos recorridos posibles para articular las unidades temáticas de Matemática para Economistas. En este sentido, se plantea cómo pueden ser abordados otros modelos económicos para poder generar avances en la transmisión de conocimiento.

Referencias Bibliográficas

Cerdá Tena, E. (2001). *Optimización Dinámica*. Madrid: Prentice Hall.

Chiang, A. C., & Wainwright, K. (2006). *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*. México, D.F.: Mc. Graw-Hill.

Intriligator, M. D. (2002). *Mathematical Optimization and Economic Theory*. Philadelphia: SIAM.

Sydsæter, K., Hammond, P., Seierstad, A., & Strom, A. (2005). *Further Mathematics for Economic Analysis*. Harlow: Prentice Hall.