171 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA: PROPUESTA DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA

ALIAGA, María Laura - RENAUDO, Juan Antonio – BARACCO, Marcela Natalia
Facultad de Ciencias Económicas, Jurídicas y Sociales – Universidad Nacional de San Luis
aliagalaura@gmail.com - juanantoniorenaudo@gmail.com - mnbaracco@gmail.com
Especialidad: Educación Matemática
Palabras claves: Derivada – Secuencia didáctica – Interpretación geométrica

Resumen

El aprendizaje del cálculo, y particularmente la noción de derivada, representan un gran desafío en la educación superior. Uno de los mayores problemas que generalmente se presentan al comenzar a estudiar dicho concepto es la comprensión de su significado geométrico ya que existen numerosas dificultades relacionadas a conocimientos previos que deben ser puestos en juego sobre todo a la hora de trabajar la interpretación geométrica de la derivada. Si bien los estudiantes pueden realizar con éxito cálculos mecánicos y resolver algunos problemas, encuentran inconvenientes a la hora de utilizar el concepto geométrico. A través de la experiencia al trabajar con estudiantes de primer año de carreras de ciencias económicas de la Universidad Nacional de San Luis, notamos que luego de cursar la asignatura Análisis Matemático I, nuestros alumnos presentan dificultades para distinguir, por ejemplo, entre la derivada de una función en un punto y la función derivada.
En el presente trabajo se propone una secuencia didáctica que facilite el aprendizaje de la interpretación geométrica de la derivada, al conjugar en ella situaciones que implican un trabajo en diferentes registros de representación semiótica. El tratamiento, pasaje y cambio de registros será el eje alrededor del cual gire la construcción de las actividades. Este trabajo geométrico y algebraico proporcionará una mejor comprensión de la interpretación geométrica de la derivada, facilitando al estudiante visualizar la relación entre la gráfica de una función y su función derivada, lo que le permitirá luego poder interpretar cuando una función crece o decrece, y encontrar los máximos y mínimos de una función, siendo ésta una de las aplicaciones más utilizadas en la economía.

INTRODUCCIÓN

Una de las mayores dificultades que se pueden presentar al comenzar a estudiar la derivada de una función, es la comprensión de su significado geométrico. Mientras que el cálculo de derivadas suele resultar sencillo e incluso atractivo, la aplicación de la interpretación geométrica de la derivada en un punto se convierte muchas veces en un problema complejo, debido a que en muchos casos no se logra adquirir el concepto con claridad.

El aprendizaje del cálculo, y particularmente la noción de derivada, representan un gran desafío en la educación superior, ya que existen numerosos problemas relacionados a conceptos previos que deben ser puestos en juego sobre todo a la hora de trabajar la interpretación geométrica de la derivada, ya que si bien los estudiantes pueden realizar con éxito cálculos mecánicos y resolver algunos problemas, encuentran inconvenientes a la hora de comprender realmente el concepto geométrico de la derivada. A través de la experiencia al trabajar con estudiantes de primer año de carreras de ciencias económicas de la Facultad de Ciencias Económicas, Jurídicas y Sociales de la Universidad Nacional de San Luis; advertimos que luego de cursar la asignatura Análisis Matemático I, nuestros alumnos presentan dificultades, por ejemplo, para distinguir entre la derivada de una función en un punto y la función derivada.

Notamos año a año que si bien en el momento de la cursada los estudiantes no refieren mayores problemas al estudiar la derivada de una función, no hay una comprensión real de su significado, ya que en algunos exámenes finales muchos alumnos no pueden indicar por qué para hallar los máximos y mínimos de una función primero debemos encontrar aquellos valores en los que la derivada sea igual a cero. Con preocupación vemos que los cálculos son perfectos, pero no hay una comprensión integral del tema.

Por todo esto, en el presente trabajo se propone una secuencia didáctica que facilite el aprendizaje de la interpretación geométrica de la derivada al conjugar en ella situaciones que implican un trabajo en diferentes registros de representación semiótica (Duval, 1998). El tratamiento, pasaje y cambio de registros será el eje alrededor del cual gire la construcción de las actividades. Este trabajo geométrico y algebraico permitirá una mejor comprensión de la interpretación geométrica de la derivada, y que de esta manera el estudiante visualice la relación entre la gráfica de una función y su función derivada, lo que luego se estudiará con detenimiento al trabajar en las aplicaciones de la derivada y los criterios para hallar máximos y mínimos de una función.

MARCO TEÓRICO

De acuerdo con Duval (1998, 2006), la actividad cognitiva del quehacer matemático tiene dos características fundamentales: por un lado, ya que no es posible acceder a los objetos matemáticos a través de la percepción sensorial, son necesarias las representaciones semióticas, que son el medio por el cual un individuo exterioriza sus representaciones mentales, es decir, puede hacerlas visibles o accesibles a los otros. En matemáticas, las representaciones semióticas son indispensables (por ejemplo los símbolos para las ecuaciones, desigualdades o los números mismos). Por otro lado, la noción de representación semiótica supone la consideración de sistemas semióticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de un sistema semiótico a otro. Entonces ¿qué se requiere para considerar un sistema como un registro de representación semiótico? Que dicho sistema permita tres fundamentales actividades cognitivas: **Formación** (dada en un registro semiótico para "expresar" una representación mental o bien para "evocar" un objeto real), **Tratamiento** (cuando la transformación produce otra representación en el mismo registro) y **Conversión** (cuando la transformación produce una representación en un registro distinto al de la representación inicial).

Para la comprensión de un concepto es necesaria la coordinación de los diferentes registros de representación, ya que con la representación en un solo registro (mono-registro) no se obtiene la comprensión integral del concepto. Sin embargo, la conversión entre registros no se realiza en forma espontánea, a menos que se trate de representaciones congruentes entre el registro de partida y el de llegada. En esta teoría se considera que la *comprensión integral de un concepto* está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación se pone de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva, logrando articulaciones entre diferentes registros de representación semiótica. Algunos ejemplos de estos registros pueden ser el lenguaje natural, las escrituras algebraicas o los gráficos cartesianos.

Al resolver una tarea matemática y utilizar un registro y posteriormente otro, algún tipo de coordinación habrá de darse entre ambos. Según Duval (2006), muchas de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se originan en el desconocimiento que tienen los profesores sobre los fenómenos relativos a estas cuestiones. Así mismo, es fundamental que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se lo reconozca en cada una de sus posibles representaciones. Por todo esto, como docentes debemos pensar en cómo organizar las actividades de la clase de modo tal que nos permitan guiar al estudiante hacia la comprensión, siendo esta tarea uno de los grandes inconvenientes con los que nos encontramos en nuestro quehacer diario.

Proponemos en esta oportunidad una secuencia didáctica, entendiendo como tal *una serie de actividades de aprendizaje que tengan un orden interno entre sí, (…) recuperando aquellas nociones previas que tienen los estudiantes sobre un hecho, vinculándolo a situaciones problemáticas y de contextos reales con el fin de que la información que a la que va acceder el estudiante en el desarrollo de la secuencia sea significativa*, *esto es tenga sentido y pueda abrir un proceso de aprendizaje.* (Díaz Barriga, 2013*).* En definitiva, lo que proponemos es una serie de actividades que permitan que el estudiante revise sus nociones previas, realice cambios y conversiones entre registros y alcance, en este ir y venir, un aprendizaje significativo. La secuencia no propone que el estudiante haga ejercicios rutinarios o monótonos, sino que realice *acciones que vinculen sus conocimientos y experiencias previas, con algún interrogante que provenga de lo real y con información sobre un objeto de conocimiento* (Díaz Barriga, 2013). La línea de secuencias didácticas está integrada por tres tipos de actividades: apertura, desarrollo y cierre. En la conformación de esta propuesta de actividades subyace simultáneamente una perspectiva de evaluación formativa, como de evaluación sumativa, la que ofrece evidencias de aprendizaje, en el mismo camino de aprender.

PROPUESTA DE SECUENCIA DIDÁCTICA:

Asignatura: Análisis Matemático I **Tema:** Interpretación Geométrica de la Derivada

Duración de la secuencia y número de sesiones previstas: Se prevén tres encuentros

Finalidad, propósitos u objetivos:

4. Identificar la recta tangente como el límite de las rectas secantes y determinar, a partir de ahí, la pendiente de la recta tangente en un punto dado.

- Obtener geométricamente la derivada de una función en un punto.
- Determinar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto por medio de la derivada.
- Comprender la diferencia entre la derivada de una función en un punto y la función derivada.
- Comprender y utilizar la interpretación gráfica de la derivada de una función en un punto para realizar la gráfica aproximada de una función.

¡IMPORTANTE! Para lograr estos objetivos, se debe tener en cuenta que es necesario utilizar los siguientes conocimientos previos, que se aplicarán a lo largo de toda la secuencia:

- Funciones: dominio, recorrido, valor numérico de una función y gráfica de una función.
- Límite de una función en un punto.
- Rectas: Elementos de una recta (pendiente, ordenada al origen), ecuación de la recta dado un punto y la pendiente, rectas tangentes y rectas secantes. Rectas perpendiculares y paralelas.

Evaluación: criterios de valoración; lineamiento para la resolución y uso de los exámenes:

Al finalizar estas actividades se espera que el estudiante esté en condiciones de identificar la diferencia entre la derivada de una función en un punto y la función derivada, y pueda utilizar la información que brinda la derivada en un punto para realizar la gráfica de una función. Estos conocimientos luego le servirán para poder interpretar cuándo una función crece o decrece, y encontrar los máximos y mínimos de una función, una de las aplicaciones más utilizadas en la economía.

Actividades de apertura: Las actividades que se plantean a continuación tienen como objetivo que el estudiante pueda familiarizarse con los conceptos de recta secante y tangente a una curva, de modo que entienda el concepto de derivada como el límite de las rectas secantes.

Actividad 1: Dada la curva $\mathrm{f}_{(\mathrm{x})} = \frac{1}{2}\mathrm{x}^2 + 2$, calcular la ecuación de la recta tangente a la curva en $\mathrm{P}_0(2{,}4)$.

Si recordamos la ecuación de la recta que pasa por un punto $y - y_0 = m(x - x_0)$, y tenemos como dato el Punto P_0 , nos faltaría conocer la pendiente m.

Tratemos de hallar una aproximación calculando la pendiente de la recta secante a la curva que pasa por los puntos $P_0(2{,}4)$ y $P_1(4{,}10)$; $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \to m = \frac{10-4}{4-2} = \frac{6}{2} \to \boldsymbol{m = 3}$

Teniendo en cuenta lo anterior, si nos acercamos por derecha a $x = 2$ podemos calcular la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P_0(2{,}4)$ y $P_2(3, \frac{13}{2})$; $m = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} \to m = \frac{\frac{13}{2} - 4}{3-2} = \frac{5}{2} \to \boldsymbol{m = 2{,}5}$

Si nos acercamos por izquierda a $x = 2$ calculamos la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P_0(2{,}4)$ y $P_3(1, \frac{5}{2})$; $m = \frac{y_3 - y_0}{x_3 - x_0} \to m = \frac{\frac{5}{2} - 4}{1-2} = \frac{3}{2} \to \boldsymbol{m = 1{,}5}$

Si generalizamos, vemos que podemos calcular las pendientes de las rectas secantes de la siguiente manera:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En nuestro caso en particular sería: $m = \frac{\left(\frac{1}{2}x^2 + 2\right) - 4}{x - 2}$

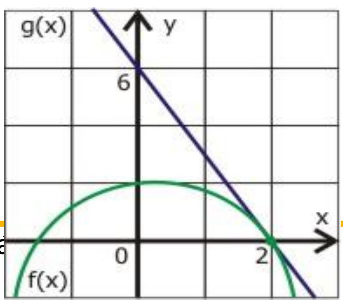
Veamos ahora los valores que toma *"m"* para diferentes valores de "x" cercanos a 2. Completa las siguientes tablas:

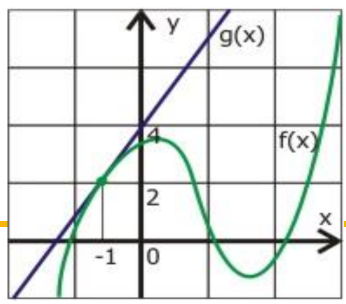
	x	**m**
Por izquierda	1	1.5
	1.5	
	1.75	
	1.85	
	1.9	
	1.99	
	1.999	**.....**

x	**m**	
3	2.5	**Por Derecha**
2.75		
2.5		
2.15		
2.1		
2.01		
2.001	**.....**	

Podemos inferir que cuando "x" más cerca está de 2, la pendiente de la recta secante se aproxima (tanto por derecha como por izquierda) a …………

Actividad 2: Encontrar las pendientes de las rectas tangentes trazadas en cada una de las gráficas y completar:





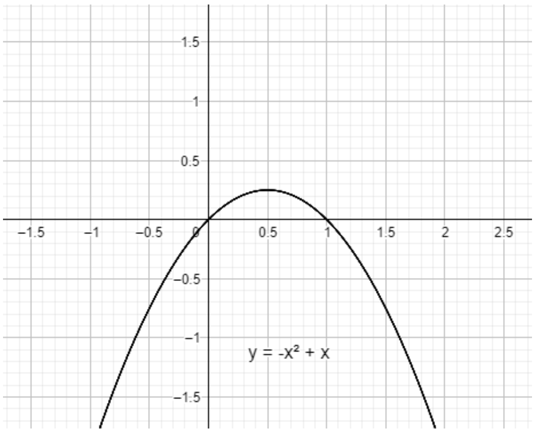
f '(2)=....... *f '(-1)=.......*

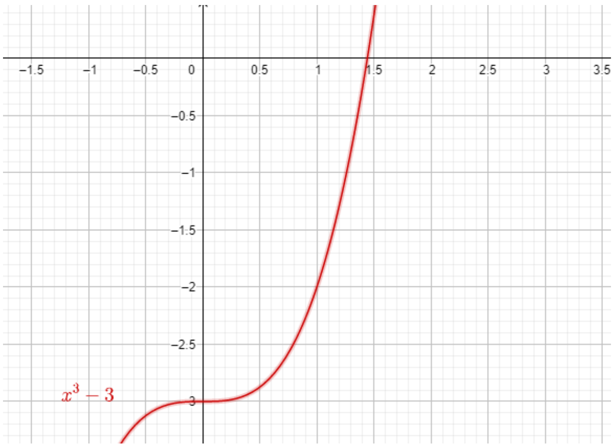
Actividades de desarrollo:

Actividad 3:

a) ¿Para qué valor del dominio de la función *f(x)* = $-x^2 + x$, la pendiente de la recta tangente es –3?

b) ¿Para qué valor del dominio de la función *f(x)* = x^3 - 3, la pendiente de la recta tangente es 3?





Actividad 4:

4.1 Encontrar el punto *(x, y)* donde la recta tangente al gráfico de $f(x) = x^3 - 2x + 3$ es:

a) paralela a la recta: *y = x* – 1 b) perpendicular a la recta: $y = -\frac{3}{2}\,x + 5$

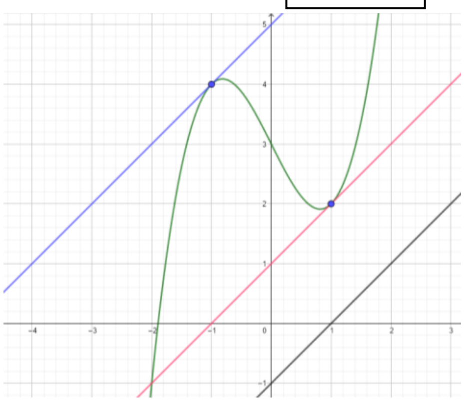
Para comenzar a pensar…

a) $f'(x) = 3x^2 - 2$. La pendiente buscada vale “……….” por lo que: $1 = 3x^2 - 2$

Al resolver la ecuación encontramos dos valores de “x”: $x_1 = 1,\ x_2 = -1$. Reemplazamos estos valores en $f(x)$ y obtenemos coordenadas de los puntos por donde pasan las rectas tangentes a la curva en: $P_1(1,2),\ P_2(-1,4)$.

Por el punto $P_1(1,2)$ pasa la recta $y - 2 = 1(x - 1) \rightarrow$

Por el punto $P_2(-1,4)$ pasa la recta $y - 4 = 1(x + 1) \rightarrow$ y = x+5



b) Debemos encontrar una recta perpendicular a: $y = -\frac{1}{10}x + 2$

$f'(x) =$ _________ , la pendiente buscada vale “_______” por lo que: _____ $= 3x^2 - 2$

Utilizando el ejemplo anterior, encuentra el punto *(x, y)* donde la recta tangente al gráfico de $f(x) = x^3 - 2x + 3$ es perpendicular a $y = -\frac{1}{10}x + 2$ y comprueba utilizando Geogebra o Photomath.

4.2) a) Dadas las siguientes funciones, indicar para qué valores *f´(x)=0.*

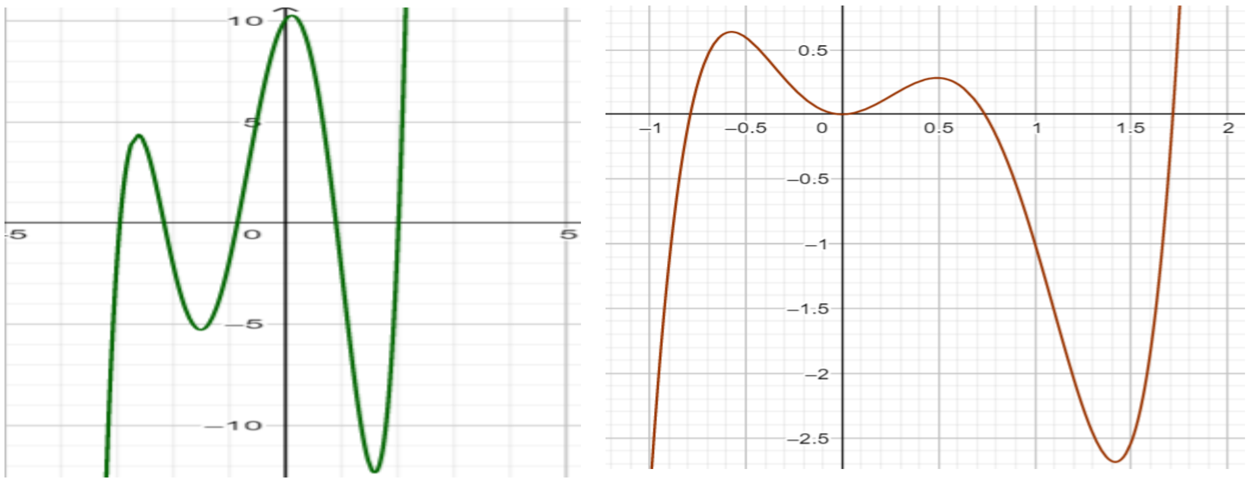
$$\boldsymbol{f(x) = -3x^2 + 2}$$

$$\boldsymbol{g(x) = 2x^3 + 6x^2 - 2}$$

$$\boldsymbol{h(x) = 3x^5 + 6x^3 - 3x}$$

b) ¿Cómo es la recta tangente a la curva en dichos puntos? **Grafique** (Puede hacerlo usando Geogebra)

4.3) Dadas las siguientes gráficas, marcar en las mismas los puntos donde la derivada de la función es igual a 0 y trazar la recta tangente en cada punto.



Actividad 7: Dibujar la gráfica aproximada de la función *g* utilizando la siguiente información:

g(0) = g(2) = g(4) = 0, *g´(1)= g´(3) = 0,* *g´(0)= g´(4) = 1,* *g´(2)= -1,*

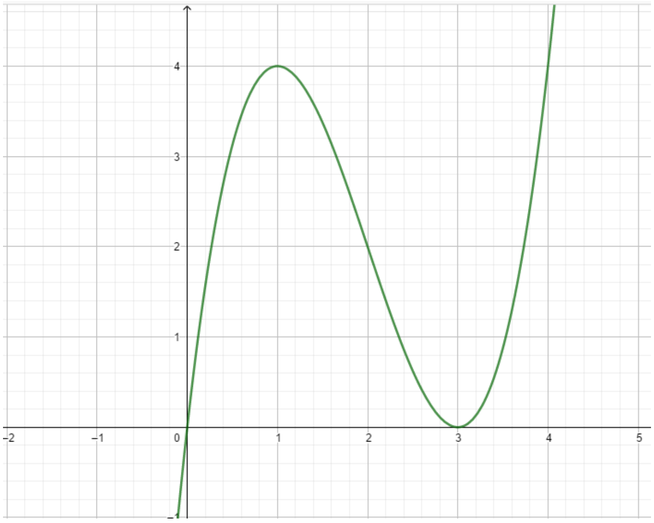
$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

Actividad 8: Dibujar la gráfica aproximada de la función *f* para la cual:

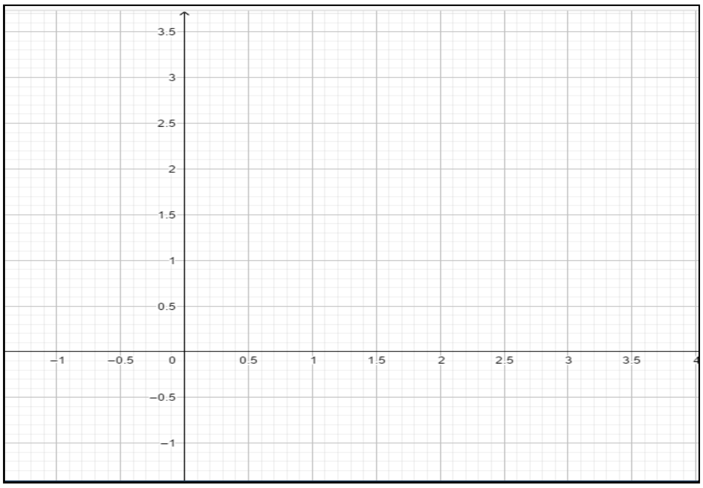
f(0) = 0, *f´(0) = 3,* *f´(1) = 0* *f´(2) = -1*

Actividades de Cierre:

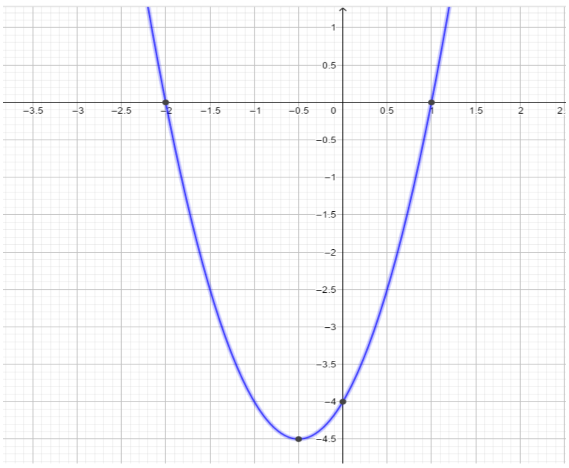
Actividad 9: Dada la gráfica de la función *f(x)* , realizar un esbozo de la gráfica de la función derivada *f´(x)* utilizando la información que te proveen las rectas tangentes de los puntos de la función *f* .



$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

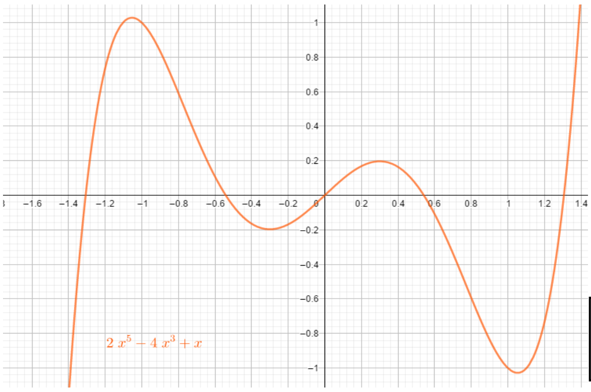


Actividad 10: Dada la gráfica de la función *f ´(x)*, y, sabiendo que *f (0)=0,* esbozar un gráfico aproximado de la función *f (x),* utilizando la interpretación geométrica de la derivada

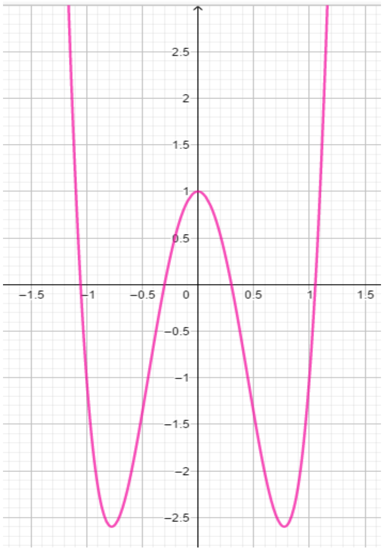


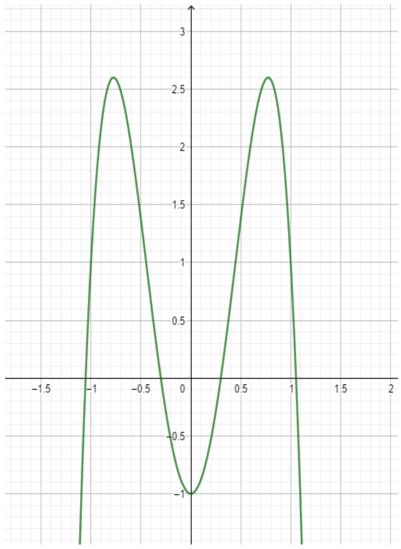
$$f'(x) = 2x^2 + 2x - 4$$

Actividad 11: En los siguientes gráficos indicar en los casos que corresponda cuál es la gráfica de la función y cuál es la gráfica de la función derivada. Justificar con al menos dos condiciones que le permiten realizar la identificación.



$f(x) = 2x^5 - 4x^3 + x$

a) 

b) 

<u>Evidencias de aprendizaje:</u> Realización de gráficas utilizando la información que brinda la derivada de la función en un punto o la función derivada. Comprobación gráfica y algebraica utilizando lápiz, papel y graficadores.

<u>Recursos:</u> Guía práctica, lápiz, papel y aplicaciones del celular (Geogebra o Photomath)

CONCLUSIÓN

Las secuencias didácticas constituyen una organización de las actividades de aprendizaje que se realizarán con y para los estudiantes con la finalidad de crear situaciones que les permitan desarrollar un aprendizaje significativo. Deben ser un instrumento que permita la comprensión del programa de estudio a través de la gradualidad y relación entre los distintos temas del mismo.

Creemos que para que el estudiante, al abordar el tema de derivadas, logre comprender su verdadero significado, debe hacer un recorrido desde la internalización del significado geométrico de la derivada como el límite de las rectas secantes a una curva. Esto, sumado a la visualización de la relación entre una función y su función derivada, debe trabajarse detenidamente en el cambio de registro de gráfico a algebraico y recíprocamente, logrando así identificar las características geométricas que relacionan una con la otra.

El minucioso tratamiento de ejercitación adecuada de manera tradicional (uso de papel, lápiz y calculadora), complementada con el uso de graficadores (GeoGebra – Photomath), disponibles como simples aplicaciones en celulares, es un recurso didáctico simple y efectivo para la comprensión y visualización de un concepto que para alumnos de primer año con escasos conocimientos previos de geometría elemental resulta sumamente abstracto e inaccesible.

Detenerse el tiempo necesario (¿perder el tiempo?) para que los alumnos se apropien de este conocimiento, es sin dudas una ganancia en lo que respecta al cambio de actitud del estudiante frente al desafío de abordar otros temas de similar complejidad, para los cuales habrán adquirido estrategias de análisis que le faciliten la comprensión.

Este quehacer docente requiere de varios factores para ser llevado a la práctica, desde el tiempo de clase, articulación con el equipo de cátedra, posibilidad de “hacer” dentro de la misma, etc. Sin embargo, estamos convencidos que este tipo de actividades son totalmente necesarias para permitirle a nuestros estudiantes una comprensión integral, que permita actuar flexiblemente con el conocimiento, siendo este el fin último de todo acto educativo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Díaz Barriga, Á. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didáctica. *UNAM, México*.
- Duval, R. (1993). Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. Antología en Educación Matemática. Ed. Cambray, R. Sánchez, E. y Zubieta, G. México: *Ed. Cinvestav .Pág. 125-139.*
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. México: Investigaciones en Matemática Educativa II. *Ed. Hitt, F. Cinvestav. Pág. 173-201.*
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9(1), 143-168.*
- Larson, R. E. H., Robert, P., Edwars, B. H., & Abellanas Rapún, L. (1999). *Cálculo y geometría analítica.*
- Leithold, L. (1994). *Matematicas previas al cálculo: funciones, graficas y geometria analitica con ejercicios para calculadora y graficadora.* Harla.
- Rojas, P. J. (2012). Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 12(1).*
- Stewart, J. (2001). *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas*. México. International Thomson.
- Tobón, S. T., Prieto, J. H. P., & Fraile, J. A. G. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias.* México: Pearson educación.
- Weber, J. E., & Draper, J. E. (1984). *Matemáticas para administración y economía.*