

## **192 UNA APROXIMACIÓN ECONÓMICA A LA INTEGRAL DEFINIDA**

Betina Fazio, María Clara Ferrer

Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Económicas

[betina.fazio@gmail.com](mailto:betina.fazio@gmail.com), [mariaclaraferrer@yahoo.com.ar](mailto:mariaclaraferrer@yahoo.com.ar)

Especialidad: Educación Matemática

Palabras Claves: Excedente del consumidor y del productor. Suma de Riemann. Integral definida.

### **Resumen**

En el modelo de enseñanza tradicional, generalmente se introduce el concepto de integral definida y luego, como aplicaciones económicas, se define y trabaja con los excedentes del consumidor y del productor.

El objetivo de este trabajo es presentar una secuencia didáctica para el desarrollo de una clase presencial de Análisis Matemático I, de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires en la que invertimos esta secuencia. A partir del análisis de un ejemplo sencillo, en un mercado pequeño, se introducen los conceptos de excedente del consumidor y del productor en forma intuitiva. Analizando la representación gráfica de dicho caso, surge la necesidad de encontrar una herramienta matemática que permita calcular el área encerrada bajo una curva que no siempre es posible mediante una fórmula geométrica o cálculo directo.

Teniendo en cuenta que las herramientas de visualización ayudan a los alumnos en la representación de las relaciones matemáticas de los problemas, pudiendo los mismos ver los efectos inmediatos de la manipulación de las condiciones iniciales, en este caso utilizaremos un applet realizado con el software GeoGebra que permitirá introducir el concepto de la Suma de Riemann para llegar finalmente a la definición de Integral definida. De esta manera podremos formalizar el cálculo del excedente del productor y del consumidor.

Esta secuencia didáctica está planteada desde una visión constructivista del proceso de enseñanza-aprendizaje. Partiendo de los conocimientos previos de los estudiantes, buscamos promover el pensamiento activo, usando representaciones adecuadas, para que el contenido aprendido resulte significativo para los estudiantes.

### **Introducción**

Somos conscientes cada vez más sobre las dificultades que tienen los estudiantes para comprender de forma reflexiva distintos tipos de conocimientos y en particular los conocimientos matemáticos. Como docentes de nivel superior intentamos que los alumnos aprenden de una manera significativa conceptos complejos y que no se limiten a la mera repetición de los mismos sino que puedan pensar con los contenidos; dándole sentido al conocimiento.

Entonces nos preguntamos: ¿Qué podemos hacer para que los contenidos sean accesibles?

¿Qué prácticas motivadoras les podemos proponer a los estudiantes para acceder al conocimiento y darle sentido al mismo?

En la búsqueda de las respuestas a estos interrogantes, es qué basamos el desarrollo de este trabajo. Proponemos una inversión de la clase. Identificamos un tema complejo, el concepto de la Integral Definida, de Análisis Matemático I, asignatura que dictamos en el Primer Tramo del Ciclo General, de la Facultad de Ciencias Económicas (FCE) de la Universidad de Buenos Aires (UBA), y desarrollamos una secuencia didáctica que permite abordar este contenido complejo a partir de un ejemplo sencillo de aplicación económica.

### **Fundamentación**

La concepción objetivista del aprendizaje establece que los conocimientos pueden ser transferidos por los profesores o transmitidos a través de la tecnología y adquiridos por los alumnos. La concepción constructivista del aprendizaje, por el contrario, establece que el conocimiento es elaborado individual y socialmente por los alumnos basándose en las interpretaciones de sus experiencias en el mundo. Puesto que el conocimiento no puede transmitirse, la enseñanza debería consistir en experiencias que faciliten la elaboración del conocimiento. (Jonassen, 2000).

Proponemos trabajar el razonamiento de los alumnos a través de un ejemplo relacionado, teniendo en cuenta que lo que se aprende a partir de la experiencia resulta más significativo y fácilmente recuperable para aplicar en situaciones similares.

Los modelos mentales que los alumnos tienen de los objetos, los sistemas y cualquier otro fenómeno, poseen unos componentes visuales y espaciales (Jonassen y Henning, 1996). La mayoría de los alumnos, a través de la representación o visualización de un fenómeno, logran comprenderlo mejor. Por esta razón, recurrimos a herramientas de visualización para ayudar a los alumnos a formar esas imágenes mentales y a visualizar las actividades.

En nuestro caso recurrimos a una herramienta dinámica como Geogebra, que permite hacer una representación visual de las relaciones matemáticas estudiadas en el ejemplo, de manera que los alumnos puedan ver los resultados inmediatos de la manipulación de las condiciones del ejemplo propuesto.

Elaboramos esta secuencia didáctica, tomando como punto central un ejemplo que dirige el aprendizaje, en lugar de resolver ejercicios de aplicación de conceptos enseñados previamente, tratamos de invertir lo que conocemos comúnmente como clase magistral. Como estrategia didáctica buscamos la inferencia de la teoría a partir de la práctica. En la elaboración de nuestro trabajo nos basamos también en los conceptos de Chevallard (1997) sobre Transposición didáctica. Chevallard ubica la transposición didáctica en una proyección que trata de replantear las transformaciones que puede sufrir un saber enseñado. Se produce lo que podríamos llamar la descontextualización del saber científico para su correspondiente contextualización en saber para enseñar, o sea la adaptación de un contenido para la mejor comprensión, seleccionando un objeto de estudio, reduciendolo, simplificandolo, reformulandolo, y secuenciandolo, partiendo de lo más fácil para llegar a lo más difícil, guardando una distancia correcta entre el saber sabio y el saber enseñado, tratando de articular el análisis epistemológico con el análisis didáctico.

## **Desarrollo**

En este trabajo proponemos un cambio en la introducción de algunos conceptos que abarca la materia Análisis Matemático I en la FCE de la UBA, intentando captar la atención de nuestros alumnos, los presentamos a partir de un caso concreto de una aplicación económica.

El tema de estudio es la integral definida, presentado a partir del excedente del consumidor.

En el modelo tradicional, comenzamos hablando sobre las Sumas de Riemann, definimos Integral definida y posteriormente se trabaja los excedentes del consumidor y del productor como ejercicios de aplicación.

Nosotras proponemos el camino inverso, es decir, introducir el concepto económico de excedente del consumidor y a partir de él definir Sumas de Riemann y la Integral definida.

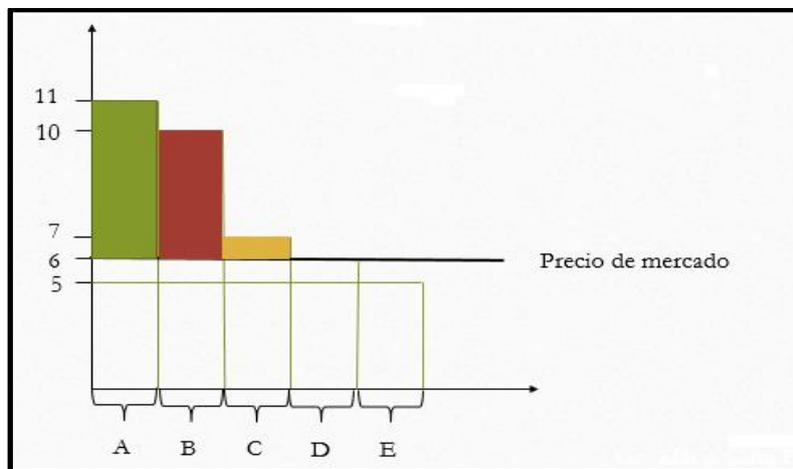
En clase comenzamos trabajando con el siguiente ejemplo: Supongamos que en el mercado de las golosinas existen cinco potenciales consumidores A, B, C, D y E, en la Tabla 1 se muestran los precios máximos que cada uno está dispuesto a pagar por una golosina, pero cuyo precio de mercado se fija en \$6

**Tabla 1:** Introducción del concepto Excedente del Consumidor

Consumidor	Precio máx. dispuesto a pagar	Situación si el precio de mercado es de \$6
A	11	Compra y evita gastar \$ 5
B	10	Compra y evita gastar \$ 4
C	7	Compra y evita gastar \$ 1
D	6	Compra y no le sobra
E	5	No compra

Con la cual introducimos el concepto de Excedente del Consumidor como “la diferencia entre el precio que un consumidor está dispuesto a pagar por un producto y el precio que en realidad paga” y concluimos que en esta economía de cinco consumidores el excedente del consumidor total es de \$10.

Luego los invitamos a pensar esta misma situación gráficamente y vamos construyendo, entre todos, un gráfico similar a la Figura 1 con la misma información anterior.

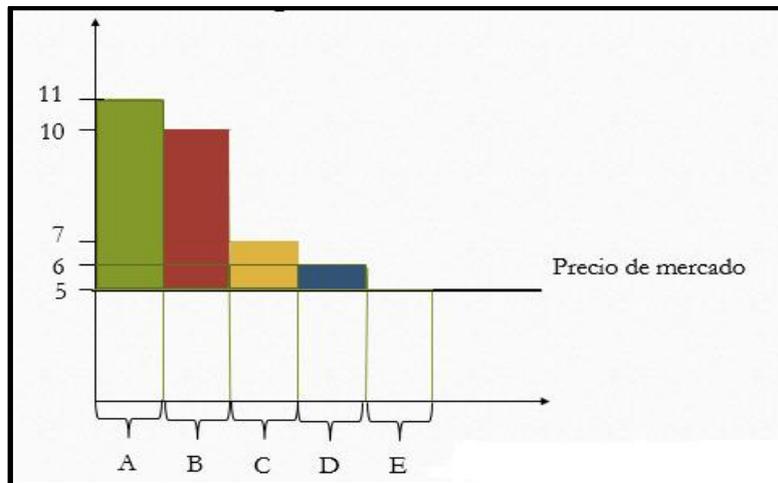


**Figura 1.** Representación del excedente del consumidor para un precio de mercado de \$6

Observamos que el rectángulo verde de base 1 y altura 5, representa el excedente del consumidor A, el rectángulo naranja de base 1 y altura 4 representa el excedente del consumidor B, el rectángulo amarillo de base 1 y altura 1 representa el excedente del consumidor C, el excedente del consumidor D está representado por una línea ya que su excedente es 0, el consumidor E, no está representado ya que no compra y sale del mercado.

El excedente total del consumidor se puede interpretar como la suma de los excedentes individuales de los consumidores, o sea la suma de las áreas de los rectángulos  $5+4+1= 10$

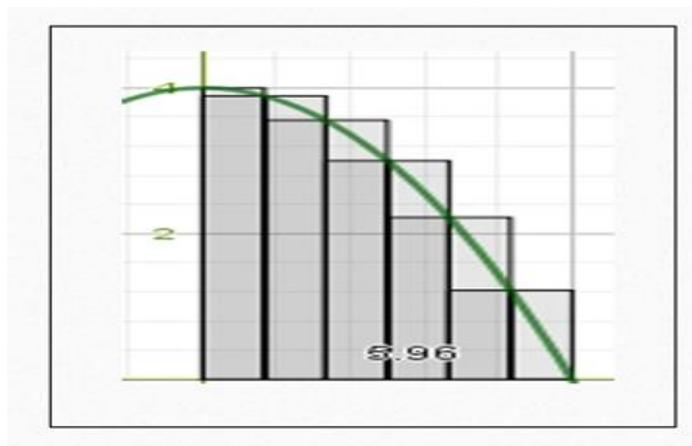
A continuación, proponemos analizar qué sucede si cambia el precio de mercado del bien, por ejemplo, si el precio disminuyera a \$5 y, discutiendo consumidor por consumidor los alumnos advierten como aumenta el área que corresponde a cada uno (Figura 2) y el excedente del consumidor total ahora es de \$14.



**Figura 2.** Representación del excedente del consumidor para un precio de mercado de \$5

Entonces los alumnos concluyen que “El excedente del consumidor está representado por la suma del área encerrada por el precio que cada consumidor está dispuesto a pagar y el precio de mercado”

A continuación, usando este resultado preguntamos ¿qué pasaría si aumenta la cantidad de consumidores dentro de ese mercado? Para responder esta pregunta les facilitamos a los alumnos una applet interactiva, diseñado con el software GeoGebra. El mismo permite que los estudiantes puedan visualizar qué ocurre cuando aumenta la cantidad de consumidores con la curva de demanda (la applet contiene un deslizador que les permite variar la cantidad de rectángulos), la misma deja de ser escalonada, transformada en una curva continua como las que se utilizan habitualmente en economía, además se observa que cuanto mayor es la cantidad de integrantes del mercado, mejor aproximación se logra al valor del área encerrada por la función demanda (Figura 3).



**Figura 3.** Captura de pantalla correspondiente al applet realizado con GeoGebra.

A partir del cual intentamos que los alumnos puedan llegar a elaborar la definición del excedente del consumidor: “El excedente del consumidor está representado por el área encerrada por la función demanda y el precio de mercado”

Este desarrollo nos permite también, descubrir la importancia del cálculo del área encerrada por una curva y sus utilidades en distintas aplicaciones.

Observando lo que sucede al aumentar la cantidad de consumidores de una economía, podemos definir las Sumas de Riemann, y concluir que para encontrar el área encerrada bajo una curva irregular debemos partir la figura en un gran número de rectángulos uniformes (con iguales longitudes), entre más rectángulos tengamos más preciso será el valor del área que obtengamos (Figura 4)

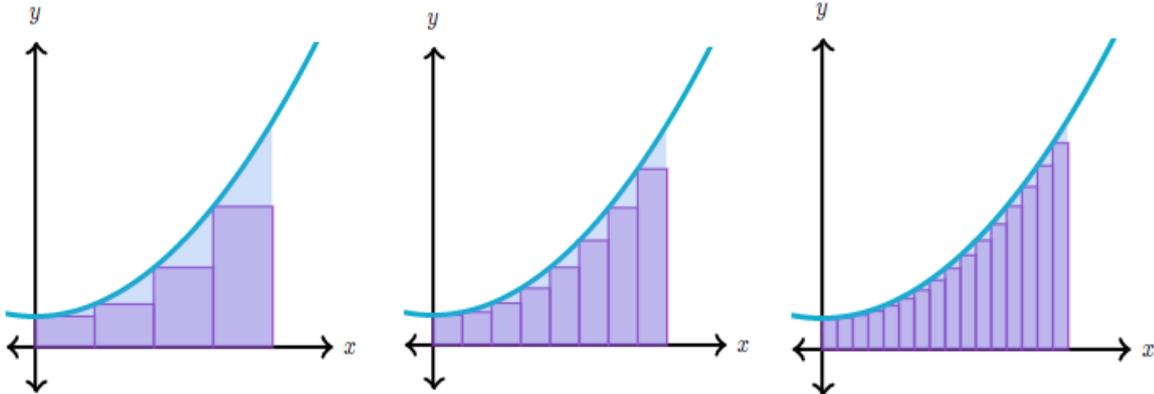


Figura 4. Mejor aproximación con más subdivisiones.

Podemos obtener la suma izquierda donde la altura de cada rectángulo es igual el valor de la función en el extremo izquierdo de su base (Figura 5)

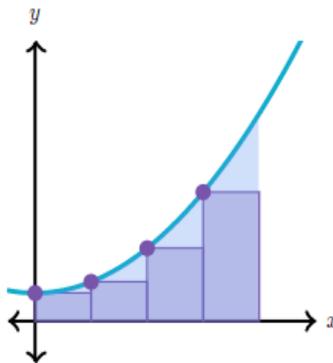
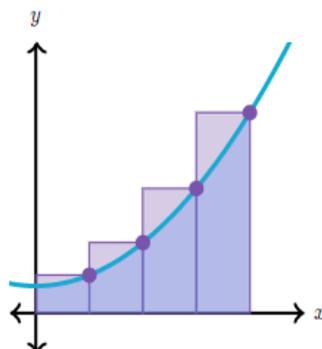


Figura 5. Suma de Riemann izquierda

O la suma derecha donde la altura de cada rectángulo es igual al valor de la función en el extremo derecho de su base(Figura 6)



**Figura 6.** Suma de Riemann derecha

Cabe aclarar que cuando usamos sumas de Riemann, a veces obtenemos una sobreestimación y otras veces una subestimación. Es bueno ser capaces de razonar sobre si una suma de Riemann particular está sobreestimando o subestimando. En general, si la función siempre es creciente o siempre es decreciente en un intervalo, podemos decir si la aproximación por suma de Riemann será una sobreestimación o una subestimación con base en si es una suma de Riemann derecha o izquierda.

Si llamamos  $f(x_i)$  a la altura de los  $n$  rectángulos en los que subdividimos el área  $f(x)$  y a la base de los mismos  $\Delta x$ , se puede expresar a las sumas de Riemann a través de la siguiente fórmula:

$$\sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \Delta x$$

Este concepto nos permitirá llegar a la definición de la Integral definida:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \Delta x = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$$

Una vez trabajado con este concepto de la Integral definida para el cálculo del área encerrada bajo una curva, trabajamos con la deducción del excedente del consumidor como Integral definida.

Para terminar, les proponemos a los alumnos una actividad que les va a permitir deducir el concepto de excedente del productor.

### Actividad para los alumnos:

Examinamos el mercado desde el punto de vista del productor, definimos el excedente del productor como la diferencia entre el precio que recibe el productor por la venta del bien y su costo de producción. Siguiendo con el ejemplo del mercado de las golosinas, tenemos tres productores F, G y H cuyos costos de producción para una golosina se muestran en la Tabla 2, suponiendo que el precio de venta en el mercado se fija en \$6.

**Tabla 2.** Introducción al concepto de excedente del productor

Productor	Costo de Producción	Situación si el precio de mercado es de \$ 6
F	2	
G	4	
H	5	

- ¿Cual sería la situación para cada productor?
- ¿Cual es el excedente total del productor para este mercado?
- Realiza una representación gráfica de la situación anterior.
- ¿Qué sucede si el precio de venta disminuye a \$5?
- Teniendo en cuenta lo realizado en los puntos anteriores ¿Cómo definirías el excedente del productor?

- f) Deduce la fórmula del excedente del productor a partir de la integral definida.

## Conclusiones

En este trabajo hemos intentado describir una secuencia didáctica que tiene por objeto repensar, en busca de una mejora, nuestra práctica docente. En este caso intentamos cambiar el enfoque del aprendizaje reproductor a partir de un enfoque constructivista en el que se busca mayor participación del alumno en la elaboración de los conceptos y la posterior generalización de los mismos. Pensamos que es importante que la acción lleve a los estudiantes al conocimiento y no una actitud pasiva. Muchas veces la necesidad de que los alumnos posean todo el contenido nos hace perder de vista el cómo y el porqué necesitan ese conocimiento.

Se han presentado las estrategias para ayudar a los alumnos en las representaciones y el apoyo de la tecnología en este proceso. Buscamos un tipo de aprendizaje activo y reflexivo más que por acumulación de contenidos.

En su libro "La escuela inteligente", Perkins (1995) plantea tres metas para optimizar el conocimiento:

- a) Retención del conocimiento.
- b) Comprensión del conocimiento.
- c) Utilización del conocimiento.

Tenemos que sólo es posible cumplir con estas dentro del marco de una educación basada en la reflexión sobre lo que se está aprendiendo, estableciendo conexiones, comparaciones con conocimientos previos, así como estableciendo patrones, diferencias, etc. En resumen, la enseñanza debe ser una consecuencia del pensamiento. El autor considera esencial el aprendizaje reflexivo en donde predomina no sólo la memoria, sino también el pensamiento. En palabras de Perkins: "Sólo es posible retener, comprender y usar activamente el conocimiento mediante experiencias de aprendizaje en la que los alumnos reflexionan sobre lo que están aprendiendo y con lo que están aprendiendo". Por lo tanto, y siguiendo a John Dewey, para Perkins la retención y acumulación sólo pueden resultar siendo una verdadera carga indigesta cuando no se le entiende, de manera que es la comprensión de la información la que permite aliviar esa carga.

Creemos que los distintos enfoques de enseñanza pueden convivir, que no son excluyentes sino que pueden resultar complementarios, ofreciendo diferentes perspectivas según el contexto y los conceptos abordados.

La secuencia didáctica no fue implementada aún en el aula, queda para un próximo trabajo el análisis de los resultados de dicha implementación.

## Referencias Bibliográficas

- LITWIN, E (2000) *Las configuraciones didácticas*. Buenos Aires. Paidós.
- PERKINS, D. (1995), *La escuela inteligente*. Barcelona. Gedisa
- PERKINS, D. (2010), *El aprendizaje pleno*. Buenos Aires. Paidós

- JONASSEN, D.(2000) *El diseño de entornos constructivistas de aprendizaje*.Madrid. En: Reigeluth,Ch. (Eds) *Diseño de la instrucción Teorías y modelos. Un paradigma de la teoría de la instrucción*.Parte I. 225-249 Madrid: Aula XXI Santillana.
- CHEVALLARD, Y (1997) *Transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires.Aique: Grupo editor
- BIANCO, CARRIZO, MATERA, MICHELONI y MARZANA, (2001) *Análisis Matemático I con aplicaciones a las Ciencias Económicas*. Buenos Aires. Ediciones Macchi.
- SCHETTINO, M (2002) *Introducción a la Economía para no economistas*. México. Pearson Educación.
- Policonomics: Economics made simple, recuperado de <https://policonomics.com/es/>, fecha de consulta 1 de abril de 2019.