194 LOS TEOREMAS EN CÁLCULO. UNA HERRAMIENTA PARA ADQUIRIR DESTREZAS EN LA DEDUCCIÓN QUE SE HACE SIGNIFICATIVA AL INFERIRLOS A PARTIR DE SITUACIONES ECONÓMICAS

Padró Silvia Inés – Facello Carlos Sebastian
Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Entre Ríos
sipadro@fceco.uner.edu.ar – sfacello@fceco.uner.edu.ar

Especialidad: Educación Matemática

Palabras Clave: Aprendizaje significativo, Curva de Laffer, Curva de Lorenz, Teoremas del Cálculo

Resumen

Sabemos que existe un desfasaje particularmente importante entre las competencias matemáticas de los estudiantes que egresan del Nivel Medio y las requeridas para el ingreso y permanencia en las carreras universitarias. En nuestro caso, Cálculo aplicado es una asignatura del 2do cuatrimestre del primer año, por lo cual se ve altamente influenciada por este desfasaje.
Las causas del mismo son diversas y complejas, lo que obliga a que las propuestas de mejoras deban tener en cuenta la multiplicidad de factores intervinientes. La necesidad de cambio y transformación del paradigma educativo, conlleva necesariamente a una resignificación del papel de los docentes como artífices del cambio en la educación. Se trata ahora, de transformarnos en profesionales de la educación capaces de crear ambientes de aprendizaje inclusivos, equitativos y altamente dinámicos.
Con este proyecto se busca dar respuesta a la problemática del desarrollo del pensamiento lógico-matemático en los alumnos, los que muchas veces no pueden alcanzar la comprensión de los procesos algebraicos que se llevan a cabo al momento de demostrar un teorema. Esto resulta en la repetición de memoria de los mismos en un examen, lo cual no implica el aprendizaje y mucho menos el arribo del conocimiento a la instancia autónoma que permitirá su aplicación a las ciencias económicas particularmente.
Esta es una de las unidades temáticas de la asignatura, la cual se ha reconvertido para alcanzar el objetivo de comprensión y desarrollo del pensamiento lógico utilizando dos curvas muy conocidas en la Economía, las de Laffer y Lorenz.

1 Introducción

En el presente trabajo sólo tomamos en cuenta dos de los teoremas sobre funciones derivables, el teorema de Rolle y el de Lagrange. En ambos casos utilizamos algún problema del área económica para introducir el tema e incluso para inducir las condiciones de la hipótesis de cada uno de ellos.

En el caso del teorema de Rolle, tomamos como ejemplo introductorio la curva de Laffer; y para el teorema de Lagrange, la curva de Lorentz.

En cada uno de los casos, se hace una introducción sobre la curva elegida ya que los estudiantes sólo han cursado Introducción a la Economía y hay conceptos que aún no conocen, pero los ejemplos elegidos son sencillos de explicar para el docente de Matemática. Igualmente, para el desarrollo en clases de este tema se confeccionó una unidad didáctica que se puso a disposición de los alumnos en el campus, en la cual se puede explayar un poco más sobre estos conceptos teóricos.

2 Teorema de Rolle – Curva de Laffer

Corría el año 1974 y Gerald Ford presidía a los Estados Unidos. En una mesa del Hotel Washington de la capital de dicho país se encontraban Donald Rumsfeld, jefe de gabinete del presidente; Dick Cheney, subjefe de gabinete; Arthur Laffer, profesor de Economía de la Universidad de Chicago y el periodista Jude Wanniski quien era editor asociado del

Wall Street Journal. Rumsfeld y Cheney estaban buscando alternativas para el plan que llevaría adelante el presidente Ford con el objetivo de combatir la inflación. Se preveía, a tal fin, un aumento en los impuestos del 5%. Fue entonces que, según lo relató posteriormente y lo hizo público Wanniski, que Laffer les dijo que aumentar los impuestos iba a ser una medida contraproducente, y que por el contrario deberían bajarlos. El periodista en su nota hace mención de que Cheney no alcanzaba a entender la idea de Laffer. Por esta razón, el economista tomó una servilleta de la mesa (que vale la pena aclarar, era de tela y se encuentra exhibida en el Museo Nacional de Historia estadounidense) y en ella, utilizando un marcador, realizó una curva en forma de campana que comienza en el punto correspondiente a la carga impositiva del 0% y finaliza en el punto correspondiente a una carga del 100%. En ambos puntos se obtiene una recaudación fiscal nula por parte del estado. La curva tiene una primera parte ascendente que indica que a medida que aumenta la carga impositiva aumenta también la recaudación fiscal, llega entonces a un tope máximo tras lo cual comienza a decrecer, lo que indica que aumentando más la carga impositiva la recaudación comienza a decrecer.

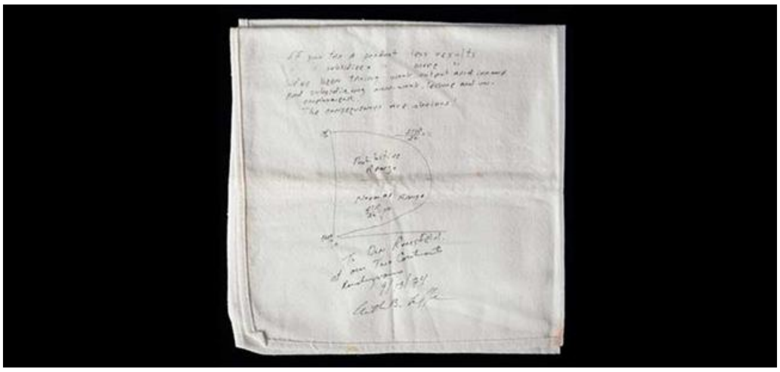

Figura 1. Imagen de la servilleta utilizada por Laffer

Wanniski bautizó la curva como "Curva de Laffer", guardó la servilleta y fue el que popularizó esta idea que fue concebida dentro de las propuestas económicas del Partido Republicano norteamericano.

Wanniski da a conocer la curva a través de un artículo publicado en 1978 en la revista The Public Interest. En el año 1980, con la llegada a la presidencia de EEUU de Ronald Reagan, la curva tuvo su paso de la teoría a la práctica no sólo en el país del norte, sino también en otros lugares del mundo. Laffer fue incorporado al equipo económico de Reagan, que en el año 1981 realizó un importante recorte de los impuestos y cinco años más tarde, en 1986, introdujo la mayor reforma en la historia del sistema impositivo de los Estados Unidos, que redujo de un 50% a un 28% la tasa máxima imponible a las personas.

En la actualidad, al presidente Donald Trump quien, en su debate previo a las elecciones en el año 2016 anunció que sus recortes de impuestos serían aún mayores que los de Ronald Reagan y dijo sentirse orgulloso de eso. La propuesta esbozada por su gobierno prevé recortar la tributación de las empresas de un 35% a un 15% y de los individuos de un 39,5% a un 35%.

Analicemos el concepto a partir de la curva tal como la trazó Laffer en la servilleta:

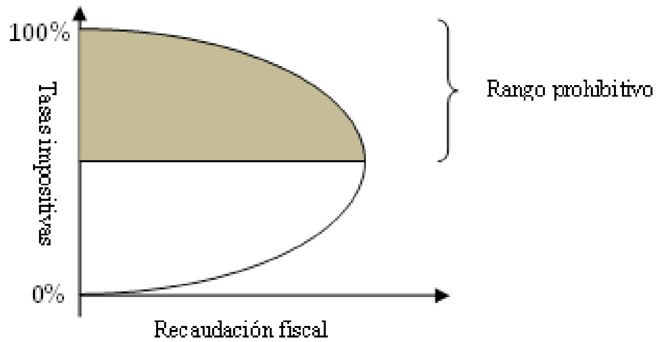

Figura 2. Curva de Laffer analizada

Como podemos ver en la curva, con una tasa impositiva del 0% el gobierno no recaudaría ingresos fiscales por más que la base impositiva sea grande, y con una tasa impositiva del 100% tampoco recaudaría nada pues nadie estaría dispuesto a trabajar por un salario cero después de abonar sus impuestos, o sea en este caso no hay base impositiva. Entre los dos extremos hay dos tasas impositivas que recaudarían la misma cantidad de ingresos, una baja sobre una base impositiva alta y otra alta sobre una base impositiva baja.

La curva en sí no afirma que un recorte de impuestos aumentará los ingresos. Como ya se mencionó antes, las respuestas de los ingresos a los cambios de las tasas impositivas dependen de numerosos factores. Laffer menciona entre ellos el sistema impositivo vigente, el período de tiempo que se esté considerando, la facilidad de movimiento hacia actividades clandestinas, el nivel de las tasas impositivas ya implementado, la prevalencia de lagunas impositivas legales y contables y la proclividad de los factores productivos.

Si nos centramos en lo que Laffer llama el “rango prohibitivo”, cuando la tasa impositiva existente es demasiado alta, entonces un recorte de la misma produciría un aumento en los ingresos fiscales. En este caso el efecto económico producido por la reducción de la tasa es mayor que el efecto aritmético correspondiente a la reducción de impuestos.

2.1 Una mirada matemática

Otra forma de visualizar la curva de Laffer es invirtiendo los ejes, de manera tal que sobre el eje horizontal se represente la tasa impositiva y en el eje vertical el ingreso fiscal. De esta manera podemos, sin alterar la lectura de la curva, considerar su trazo como una función (Ver Figura 3)

Podemos ver que a una tasa t_1 la recaudación es R_1 que es inferior a la óptima, la que se alcanza para una tasa t_2. Si la tasa aumenta a un valor superior a éste último, por ejemplo t_3 la recaudación disminuye a un valor R_3. Es decir que para tasas superiores a t_2, se produce un descenso en la recaudación y una disminución también de la productividad. Estas tasas causan un des-incentivo en la economía y el traslado de los contribuyentes hacia el comercio informal. Cuando en una economía, las tasas se encuentran por encima del valor de la tasa óptima (t_2), una reducción de los impuestos origina un aumento en la tasa de empleos y del nivel de producción, beneficiando además al gobierno en el aumento de la recaudación.

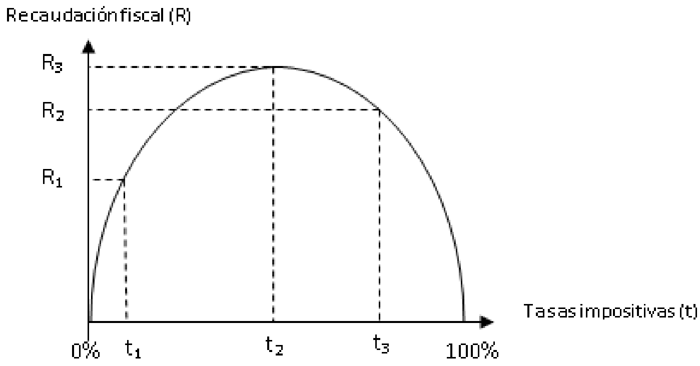

Figura 3. Recaudación fiscal en función de la tasa impositiva

Esta curva tiene la particularidad que tanto para una tasa del 0% como para una tasa del 100% los valores de la recaudación serán obviamente de $0. Además es una curva continua dentro del intervalo de tasa [0, 100], más allá de que pueda asumir una forma más o menos simétrica. Sumemos a estas condiciones, la de derivabilidad en ese intervalo, de esta forma arribamos al enunciado de un teorema que data del año 1691 y para cuya demostración no usó el cálculo diferencial. En 1834, el alemán Moritz Drobisch y el italiano Giusto Bellavitis fueron los primeros en usar el nombre de "Teorema de Rolle".

2.2 **Demostración**

A continuación se procede a la demostración del Teorema, cuyos pasos omitimos en este trabajo porque obviamente son conocidos por los lectores.

Lo que se realizó fue, en cada paso de la demostración, asociar el caso con la curva de Laffer y ver si podía cumplirse o no. Tomamos sólo un caso como ejemplo:

<u>2do. Caso</u>: en los extremos del intervalo se encuentra el valor máximo de la función

En cada caso se parte del segundo teorema de Weierstrass por el cual podemos afirmar que al ser la función continua, dentro del intervalo cerrado existe un mínimo y un máximo absoluto. En este caso, al considerar que el máximo está en los extremos, resulta un gráfico como el siguiente:

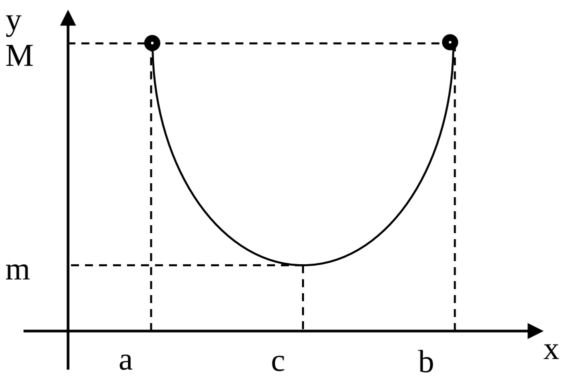

Figura 4. Uno de los casos considerado en el Teorema de Rolle

Este caso no puede presentarse en la curva de Laffer, pues parte de extremos en los cuales la función no vale cero lo cual es una de las condiciones de la misma. Por otro lado, si trasladamos la función de manera que sus extremos valgan cero, toda la función quedaría debajo del eje x, con lo cual tampoco sería posible porque indicaría recaudaciones fiscales negativas.

2.3 **Veamos un ejemplo**

En Colombia se realizó un estudio de la curva de Laffer (Bejarano Navarro, 2008) para estimar el impacto de las reformas tributarias sobre lo recaudado. Las variables utilizadas fueron los ingresos tributarios como porcentajes del PIB en el período de estudio (variable independiente) y los ingresos tributarios reales per cápita (variable dependiente). Se obtuvo la siguiente curva:

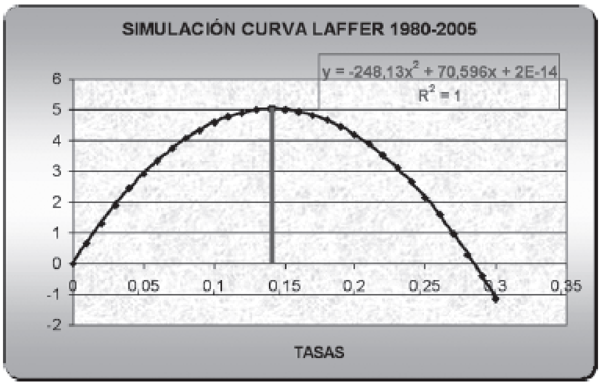

Figura 5. Curva de Laffer en Colombia (Bejarano Navarro, 2008)

Puede verse la estimación de la curva obtenida, cuya ecuación es $y = -248.13x^2 + 70.596x + 2.10^{-14}$, el término independiente es prácticamente despreciable en valor.

Si nosotros procedemos a buscar el máximo de la curva tendremos la tasa de interés que produjo la mayor recaudación fiscal. Este punto coincide con el valor de la x para el cual la derivada de la función es cero (por ser la función derivable). Resulta:

$y' = -496.26x + 70.596 = 0 \Rightarrow x = 0.1422$

Para este valor de la tasa (14,22 %) la recaudación estimada máxima es de 5.021 (unidades monetarias consideradas)

3 **Teorema de Lagrange – Curva de Lorenz**

Sea cual sea la forma en que los individuos o las familias obtienen sus rentas, el resultado es muy desigual. La distribución de la renta puede ser analizada con diferentes enfoques: geográfico-espacial, funcional o personal, entre otros.

En el enfoque geográfico-espacial se tratará de medir la diferencia de rentas entre los habitantes de diversas regiones. Los resultados de estos tipos de estudio pueden ser representados en un tabla de datos o en gráficos como el siguiente (Ver Figura 6)

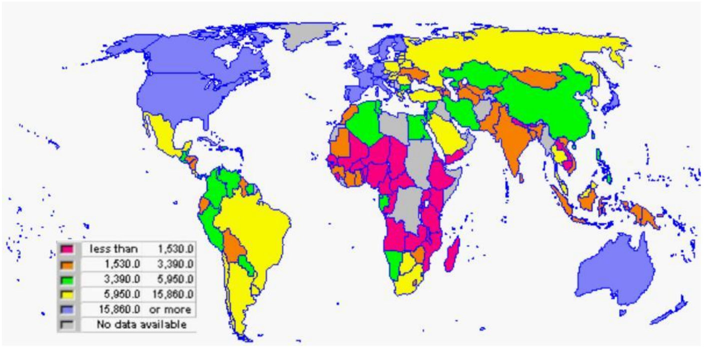

Figura 6. Distribución de la pobreza a nivel mundial (Fuente Banco Mundial World Developments Indicators 2001)

La distribución funcional es una forma de mostrar las diferencias de las rentas obtenidas por los propietarios de los factores productivos según su función en la sociedad. Así se suele mostrar la parte de la renta nacional percibida por los trabajadores, por los propietarios de la tierra y por los propietarios del capital.

Tabla 1. Evolución del Salario en Argentina (Fuente Tesis Licenciatura Daniela Trípoli, 2018)

Cuadro 3. Comparación de la Variación de Salario Medio y RTA base 100=1993

Gran División	Salario Medio% en 1993	Salario Medio% en 2015 base 100=1993	Variación Salario Medio 1993-2015	Dinámica Salario Medio	RTA% en 1993	RTA% en 2015 base 100=1993	Variación RTA 1993-2015	Dinámica RTA
GD1	100%	124%	24%	Progresiva	100%	174%	74%	Progresiva
GD2	100%	44%	-56%	Regresiva	100%	142%	42%	Progresiva
GD3	100%	90%	-10%	Regresiva	100%	110%	10%	Progresiva
GD4	100%	265%	165%	Progresiva	100%	220%	120%	Progresiva
GD5	100%	86%	-14%	Regresiva	100%	209%	109%	Progresiva
GD6	100%	108%	8%	Progresiva	100%	232%	132%	Progresiva
GD7	100%	196%	96%	Progresiva	100%	394%	294%	Progresiva
GD8	100%	137%	37%	Progresiva	100%	315%	215%	Progresiva
GD9	100%	-----	-----	-----	100%	-----	-----	-----

Fuente: Elaboración propia

El cuadro fue obtenido de una tesis de licenciatura en Economía de Daniela Trípodi, realizada en el año 2018 en la ciudad de Mar del Plata, y es relativa a datos extraídos de nuestro país (la sigla RTA es la remuneración al trabajo asalariado)

La curva de Lorenz es un gráfico frecuentemente utilizado para representar la distribución relativa de una variable en un dominio determinado. El dominio puede ser el conjunto de hogares o personas de una región o país, por ejemplo. La variable cuya distribución estudiamos puede ser el ingreso de los hogares o las personas. La curva se gráfica considerando en el eje horizontal el porcentaje acumulado de personas u hogares del dominio en cuestión y el eje vertical el porcentaje acumulado del ingreso.

Cada punto de la curva se lee como porcentaje acumulado de los hogares o las personas. La curva parte del origen (0,0) y termina en el punto (100,100). Si el ingreso estuviera distribuido de manera perfectamente equitativa, la curva coincidiría con la línea de 45 grados que pasa por el origen (por ejemplo el 15% de los hogares o de la población percibe el 15% del ingreso). Si existiera desigualdad perfecta, o sea, si un hogar o persona poseyera todo el ingreso, la curva coincidiría con el eje horizontal hasta el punto (100,0) donde saltaría el punto (100,100). En general la curva se encuentra en una situación intermedia entre estos dos extremos, si una curva de Lorenz se encuentra siempre por encima de otra (y, por lo tanto, está más cerca de la línea de 45 grados) podemos decir sin ambigüedad que la primera exhibe menor desigualdad que la segunda. Esta comparación gráfica entre distribuciones de distintos dominios geográficos o temporales es el principal uso de la curvas de Lorenz.

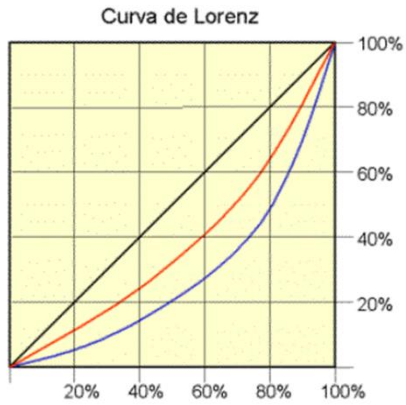

Figura 7. Curva de Lorenz

La curva de Lorenz es una forma gráfica de mostrar la distribución de la renta en una población. En ella se relacionan los porcentajes acumulados de población con porcentajes acumulados de la renta que esta población recibe. En el eje de abscisas se representa la población ordenada de forma que los percentiles de renta más baja quedan a la izquierda y los de renta más alta quedan a la derecha. El eje de ordenadas representa las rentas.

En la gráfica se muestran como ejemplo la representación de dos países imaginarios, uno en azul y otro en rojo. La distribución de la renta en el país azul es más desigual que en el país rojo. En el caso del país azul, el cuarenta por ciento más pobre de la población recibe una renta inferior al veinte por ciento del total del país. En cambio, en el país rojo, el cuarenta por ciento más pobre recibe más del veinte por ciento de la renta.

La línea diagonal negra muestra la situación de un país en el que todos y cada uno de los individuos obtuviese exactamente la misma renta; sería la equidad absoluta. Cuanto más próxima esté la curva de Lorenz de la diagonal, más equitativa será la distribución de la renta de ese país.

Otra forma de observar la curva de Lorenz es estimando el área de la superficie que se encuentra entre la curva y la diagonal. Esa superficie se llama área de concentración. Cuanto mayor sea esta área más concentrada estará la riqueza; cuanto más pequeña sea este área, más equitativa será la distribución de la renta del país representado.

Consideremos, para analizar la curva, los dos puntos extremos, A(0, 0) y B(100, 100) y tracemos por dichos puntos una recta secante. La pendiente de dicha recta secante la podemos calcular de la siguiente forma:

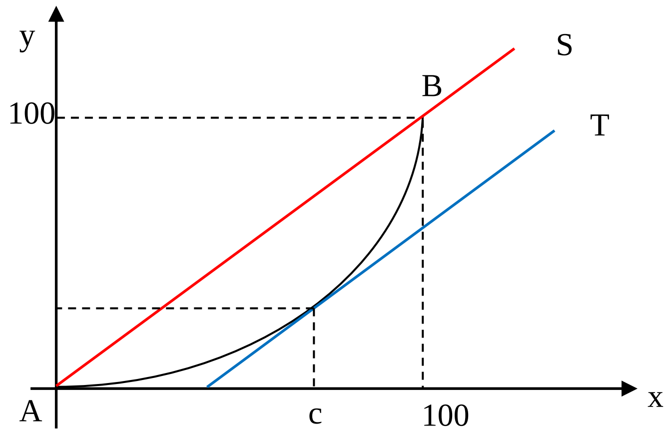

Figura 8. Gráfica de análisis de la curva de Lorenz

La expresión $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la recta secante *"S"*, en nuestro caso en particular sería $\frac{100-0}{100-0}=1$ que es la pendiente de la recta diagonal que representa una equidad absoluta en la distribución del ingreso.

La expresión $f'(c)$ nos da la pendiente de la recta tangente al gráfico de la función en el punto de abscisa $x = c$ podemos trazar una recta *tangente T que* es paralela a la recta secante *S* por tener igual pendiente, es en ese punto donde la distribución alcanza su mayor desigualdad, a la izquierda de ese punto, sobre el eje de abscisas, nos queda representado el porcentaje de población que tiene una menor participación en la distribución de la renta o ingreso, a la derecha el porcentaje de población que tiene una mejor participación en la distribución.

Veamos cuáles son las condiciones de la curva que describimos. Es continua en el intervalo en el cual estamos trabajando [0, 100]. Le vamos a agregar la condición de derivabilidad y resultan las condiciones de un teorema que expresara Joseph Louis Lagrange aproximadamente en el año 1770 en el teorema que lleva su nombre y también conocido como el Teorema del Valor Intermedio del Cálculo Diferencial.

3.1 **Demostración**

Al igual que el caso anterior, no vamos a detenernos en hacer la demostración, sólo comentaremos que también al ir haciendo los diferentes pasos lo hacemos en forma genérica, para una función cualquiera pero comparándola con la que acabamos de utilizar como introductoria al tema.

Por ejemplo, cuando se comienza la demostración del teorema, se formula la ecuación de la recta secante.

En general, nosotros trabajamos de esta forma:

Siendo los puntos A(a, f(a)) y B(b, f(b)), la pendiente de la recta que une dichos puntos es:

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

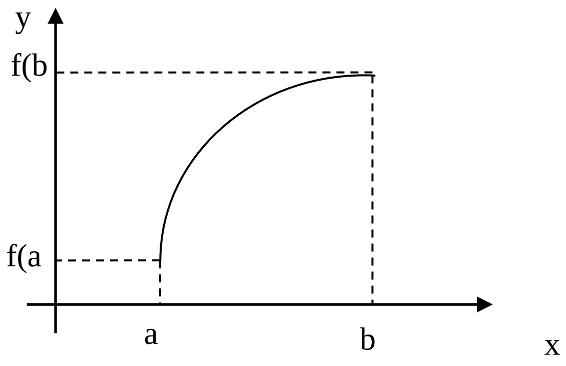

Figura 9. Gráfica de análisis general del Teorema de Lagrange

En el caso de nuestra curva, este valor, como vimos antes es 1 pues los extremos son (0, 0) y (100, 100)

La ecuación de la recta tangente, en este caso genérico es:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Esto llevado a nuestra curva, siendo A el punto (0, 0) y B el punto (100, 100), es:

$$y = 0 + \frac{100 - 0}{100 - 0}(x - 0) \Rightarrow y = x$$

Esta ecuación corresponde efectivamente con la recta que pasa por el origen y es bisectriz del primer y tercer cuadrantes, formando con el eje x un ángulo de 45 grados.

3.2 Veamos un ejemplo

Un estudio llevado a cabo por el observatorio social de la Universidad Nacional de Rosario, produjo la gráfica de la curva de Lorenz para el período 2016-2018 en la provincia de Santa Fe comparada con la de nuestro país (ver figura 10). La estimación de la curva de Lorenz para Argentina resulta ser: $y = 0.0047x^2 + 0.531x - 0.00002358$

Sabemos que la recta secante por los extremos coincide con la recta $y = x$, por lo tanto debemos buscar la recta tangente a la curva de pendiente 1, o sea el punto de la curva en el cual la derivada toma dicho valor.

$$y' = 0.0094x + 0.531 = 1 \Rightarrow x = 49.89$$

Por lo tanto el punto de mayor desigualdad se da cuando el 49,89% más pobre de la población del nuestro país recibe una renta inferior al 40% del total del país (38,19%)

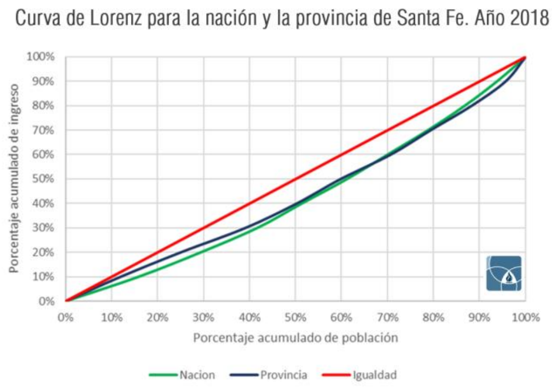

Figura 10: Curva de Lorenz (Jara Musuruana, 2019)

4 Conclusiones y trabajos futuros

Es muy interesante comprobar el cambio de la actitud y el interés de los alumnos cuando uno inicia el desarrollo de un teorema a través de un caso económico. Esto atrapa la atención e incentiva la participación en los diferentes momentos del desarrollo, logrando de esta forma que el alumno pueda inferir ciertas características de las funciones, previo al enunciado del teorema.

Nuestro trabajo actualmente consiste en cambiar un apunte teórico tradicional por unidades didácticas que comiencen siempre con algún ejemplo del área de la Economía.

Referencias

Bejarano Navarro, H. (2008) Verificación empírica de la curva de Laffer en la economía colombiana (1980 – 2005). *Revista Facultad Ciencias Económicas*, XVI, 151-164

Casparri, M, Efelbaumm M. (2014) La curva de Laffer y el Impuesto Inflacionario. *Revista de Investigación en modelos matemáticos aplicados a la gestión y a la Economía.* 1, 89 - 97

Haeussler, E; Paul, R y Wood, R (2015). *Matemáticas para Administración y Economía. 13 Edición*. México: Prentice Hall

Jara Musuruana, L. (2019) Distribución del ingreso en Rosario y Santa Fe, evolución 2016-2018. *Informe del Observatorio UNR*. 47, 2-23

Tan, S. (2012) *Matemáticas para administración y Economía 5ª Edición*, México: CengageLearning.

Zill, D. y Wright, W., (2011), *Cálculo de una variable. Trascendente tempranas, 4ª Edición*, México: Mc Graw Hill