

## **206 ESTIMACION BAYESIANA DE MODELOS DE VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA**

Fabris, Julio Eduardo

Facultad de Ciencias Económicas – Universidad de Buenos Aires

[Jfabris88@yahoo.com.ar](mailto:Jfabris88@yahoo.com.ar)

**Especialidad:** Estadística Aplicada

**Palabras Claves:** Estimación Bayesiana – Modelos financieros – Volatilidad estocástica

### **Resumen**

Las series financieras se modelan usualmente mediante la familia de procesos ARCH. Sin embargo una interesante alternativa a estos tradicionales modelos son los de volatilidad estocástica (SV) introducidos por primera vez por Taylor (1986). En ellos la volatilidad instantánea no depende de las realizaciones anteriores de la serie como en la familia GARCH, sino de una variable no observable, que se supone sigue un proceso estocástico autorregresivo.

En la estimación de estos modelos, sin embargo, surge un problema: Si la perturbación considerada en el modelo fuera normal, independiente e idénticamente distribuida, entonces los parámetros del modelo de volatilidad estocástica podrían ser eficientemente estimados mediante la aplicación del filtro de Kalman. Sin embargo, como dicha perturbación no está normalmente distribuida, los estimadores obtenidos son consistentes pero ineficientes y la estimación se denomina “Estimación de Cuasi Máxima Verosimilitud”.

Es por eso que se han desarrollado técnicas para poder lograr la estimación del modelo, utilizando métodos de Monte Carlo via cadenas de Markov (MCMC), que incluyen a los algoritmos de Metropolis-Hastings y Gibbs. Estos métodos, que son computacionalmente intensivos, se basan en la idea de producir realizaciones simuladas de una función de distribución objetivo multivariada, mediante el muestreo repetido de una cadena de Markov, cuya distribución invariante es la de la distribución de interés.

En esta ponencia se desarrolla una aplicación de dichos métodos a la modelización de una serie de retornos diarios de activos financieros, desarrollando paso a paso la metodología utilizada y comparando los resultados obtenidos con los que resultan de aplicar el método de Cuasi Máxima Verosimilitud anteriormente citado.

### **1. Introducción**

Las series financieras se modelan usualmente mediante la familia de procesos ARCH. Sin embargo, una interesante alternativa a estos tradicionales modelos son los de volatilidad estocástica (SV) introducidos por primera vez por Taylor (1986). En ellos la volatilidad instantánea no depende de las realizaciones anteriores de la serie como en la familia GARCH, sino de una variable no observable, que se supone sigue un proceso estocástico autorregresivo.

En la estimación de estos modelos, sin embargo, surge un problema: Si la perturbación considerada en el modelo fuera normal, independiente e idénticamente distribuida, entonces los parámetros del modelo de volatilidad estocástica podrían ser eficientemente estimados mediante la aplicación del filtro de Kalman. Sin embargo, como dicha perturbación no está normalmente distribuida, los estimadores obtenidos son consistentes pero ineficientes y la estimación se denomina “Estimación de Cuasi Máxima Verosimilitud”.

Es por eso que se han desarrollado técnicas para poder lograr la estimación del modelo, utilizando métodos de Monte Carlo via cadenas de Markov (MCMC). Estos métodos, que son computacionalmente intensivos, se basan en la idea de producir realizaciones simuladas de una función de distribución objetivo multivariada, mediante el muestreo repetido de una cadena de Markov, cuya distribución invariante es la de la distribución de interés.

En esta ponencia se desarrolla una aplicación de dichos métodos a la modelización de una serie de retornos diarios de activos financieros.

## 2 Modelización de series financieras

En el caso de las series de tiempo financieras se observa la particularidad de tener volatilidades cambiantes a lo largo del tiempo que tienden a estar correlacionadas en el sentido de que grandes cambios en el valor de la serie son seguidos por grandes cambios (períodos de mucha volatilidad), mientras que cambios pequeños en el valor de la serie son seguidos por cambios pequeños (períodos de baja volatilidad) como se observa en la Figura 1.

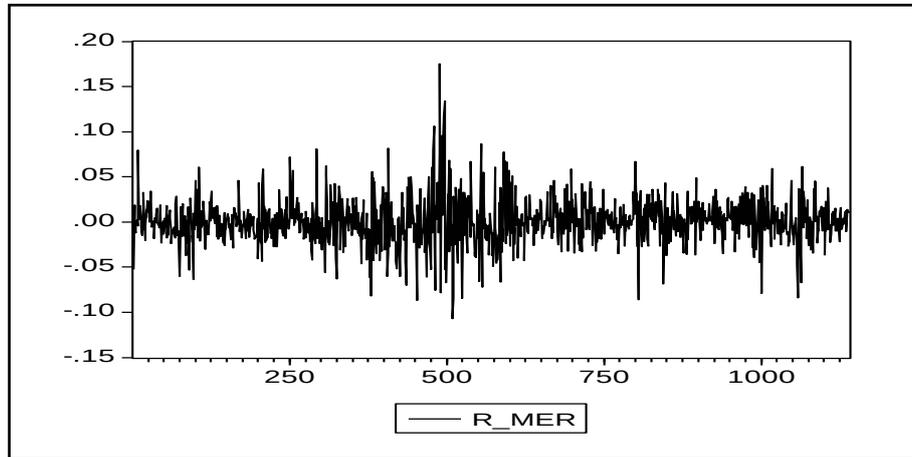


Figura 1. Gráfico típico de los retornos de activos financieros

En términos estadísticos este agrupamiento se traduce en correlaciones positivas en la serie de los cuadrados. Esta propiedad, junto con otras como el exceso de curtosis o la ausencia de correlación en los niveles, son consideradas como características típicas de las series financieras.

### 2.1 Modelos ARCH

En la econometría existen desde hace un tiempo modelos desarrollados especialmente para capturar la dinámica de las series financieras. El trabajo pionero de Engle (1982), que dio origen a los modelos ARCH (modelo de Heterocedasticidad Condicional Autorregresiva), y el trabajo de Bollerslev (1986), que presentó una generalización del modelo denominada GARCH o ARCH generalizado, fueron el punto de partida para el desarrollo de una extensa familia de modelos y una profusa literatura especializada.

La formulación básica de estos modelos consiste en modelar la serie de interés  $\{y_t\}_{t=1}^T$  según la ecuación:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

donde  $\varepsilon_t$  es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza unitaria, y  $\sigma_t$  es un factor denominado volatilidad.

En el modelo más simple  $y_t$  es un proceso serialmente incorrelacionado y con media cero, y  $\sigma_t$  es una función positiva. Los diferentes modelos de la familia ARCH surgen de las distintas formas de modelizar  $\sigma_t^2$ . En el modelo ARCH(q) dicha especificación viene dada por:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

donde  $\omega$  representa la varianza media y  $\varepsilon_t$  las innovaciones en la volatilidad de la serie. Por lo tanto, la varianza condicional contemporánea resulta depender de los rezagos de las mencionadas innovaciones.

Bollerslev generalizó el modelo para permitir una especificación mas general de la varianza condicional como un modelo ARMA (p,q). Este modelo recibió la denominación de ARCH generalizado o GARCH y sus ecuaciones son:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2$$

A partir de la especificación del modelo de Engle los trabajos de investigación tanto teórica como empírica sobre los modelos ARCH se multiplicaron, dando lugar a una amplia familia de modelos.

## 2.2 Modelos de volatilidad estocástica

Una alternativa a la modelización de series financieras con la familia de procesos ARCH son los Modelos de Volatilidad Estocástica (SV) introducidos por primera vez por Taylor (1986). En estos modelos  $\sigma_t^2$  no depende de las observaciones pasadas de la serie sino de una variable no observable, que se modela en general como un proceso estocástico autorregresivo. Para garantizar la positividad de la varianza la ecuación de la volatilidad se define para el logaritmo natural de  $\sigma_t^2$ , al igual que en el modelo EGARCH.

Sea  $r_t$  el retorno de un activo entre el período  $t-1$  y el período  $t$ , un modelo simple de volatilidad estocástica tiene la forma

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t \cdot \varepsilon_t & \varepsilon_t &\square iid N(0,1) \\ h_t &= \ln \sigma_t^2 = \gamma + \phi h_{t-1} + \eta_t & \eta_t &\square iid N(0, \sigma_\eta^2) \\ E[\varepsilon_t \eta_t] &= 0 & 0 &< \phi < 1 \end{aligned}$$

El modelo simple anteriormente presentado puede generalizarse en forma inmediata haciendo que  $h_t$  sea un modelo ARMA(p,q) estacionario, lo cual permitiría un mejor ajuste en el modelo.

También es posible extender el modelo SV de forma que la ecuación que modela a  $h_t$  contenga una raíz unitaria. Esto permite abordar el análisis empírico de las series financieras que producen un valor estimado de  $\phi$  muy próximo a uno. Por último, si  $\varepsilon_t$  y  $\eta_t$  están correlacionado, el modelo SV puede replicar la respuesta asimétrica de la volatilidad a los cambios de signo en la serie  $r_t$ .

Los modelos de volatilidad estocástica han sido menos utilizados que los modelos de tipo ARCH, para los cuales la literatura es profusa. Sin embargo, tienen algunas ventajas sobre estos últimos. En primer lugar, sus propiedades

dinámicas son fáciles de obtener e interpretar a partir del proceso estocástico subyacente. Además, se generalizan fácilmente al caso multivariante.

Como desventajas cabe citar la ya mencionada menor difusión, lo cual hace que los estudios disponibles no sean muy numerosos; y el problema de su difícil estimación, al no poderse construir la función de verosimilitud en forma exacta.

### 3 Estimación del modelo de SV

Para la estimación del modelo de volatilidad estocástica hay, en principio, 2 estrategias. La primera y más clásica es linealizar el modelo y estimarlo via un Filtro de Kalman. Dicha vía ya fue explicada en el párrafo anterior. La segunda alternativa es estimarlo mediante el Método de Monte Carlo basado en Cadenas de Markov (MCMC).

#### 3.1 Estimación mediante el filtro de Kalman

Se conoce con el nombre de filtro de Kalman al algoritmo que permite actualizar de manera secuencial una proyección lineal de un sistema dinámico. Para la derivación de las ecuaciones que describen el filtro se parte de un sistema dinámico expresado en una forma particular llamada representación de espacio-estado.

Denotemos por  $\mathbf{y}_t$  un vector de dimensión  $(n \times 1)$  de variables *observadas* o “señal” en  $t$  y por  $\mathbf{h}_t$  un vector de dimensión  $(r \times 1)$  de variables *no observadas* u “ocultas” conocido como *vector de estado*. La representación de espacio-estado de la dinámica de  $\mathbf{y}_t$  se encuentra dada por el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\text{Ecuación para las variables observadas o señal: } \mathbf{y}_t = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{x}_t + \mathbf{H}' \cdot \mathbf{h}_t + \xi_t$$

$$\text{Ecuación de estado para las variables ocultas o de estado: } \mathbf{h}_t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{h}_{t-1} + \eta_t$$

Donde  $\mathbf{A}'$ ,  $\mathbf{H}'$  y  $\mathbf{F}$  son matrices de parámetros y  $\mathbf{x}_t$  es un vector variables predeterminadas o exógenas (que puede incluir rezagos de la propia variable  $\mathbf{y}_t$ ). Los vectores  $\xi_t$  y  $\eta_t$  se asumen vectores ruido blanco. También se supone que no existe correlación entre las perturbaciones  $\mathbf{v}_t$  y  $\mathbf{w}_t$ :

Debido a que este modelo es no lineal, debe previamente efectuarse una linealización para poder estimarlo mediante el filtro, que es esencialmente lineal. Recordando el modelo en su forma original;

Definiendo  $y_t = \ln(r_t^2)$ , resulta ser:

$$r_t^2 = \sigma_t^2 \varepsilon_t^2$$

$$y = \ln(r_t^2) = \ln(\sigma_t^2) + \ln(\varepsilon_t^2)$$

Se puede demostrar que, dado que  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ ,  $\ln(\varepsilon_t^2)$  sigue una distribución  $\log \chi^2$ , con  $E[\ln(\varepsilon_t^2)] = -1,27$  y  $Var(\ln(\varepsilon_t^2)) = \pi^2/2$ .

Se define entonces  $\xi_t = 1,27 + \ln(\varepsilon_t^2)$

con lo cual 
$$E[\xi_t] = 1,27 + E[\ln(\varepsilon_t^2)] = 0$$

y 
$$\text{Var}[\xi_t] = \text{Var}[\ln(\varepsilon_t^2)] = \pi^2/2$$

la representación para  $y_t$  en función de la componente no observable  $h_t$  toma la forma de un modelo de espacio de estados como :

$$\begin{aligned} y_t &= -1,27 + h_t + \xi_t & \xi_t &\square \text{ iid } (0, \pi^2/2) \\ h_t &= \gamma + \phi h_{t-1} + \eta_t & \eta_t &\square \text{ iid } N(0, \sigma_\eta^2) \\ E[\xi_t \eta_t] &= 0 \end{aligned}$$

Donde:  $y_t$  : variable observada o “señal”,  $h_t$  : variable no observada ó “variable de estado”,  $\xi_t$  y  $\eta_t$  : perturbaciones normales (gaussianas).

Si  $\xi_t$ , que es independiente e idénticamente distribuida, tuviera distribución normal, entonces los parámetros  $\Omega = (\gamma, \phi, \sigma_\eta^2)$  del modelo de volatilidad estocástica podrían ser eficientemente estimados maximizando la descomposición del error de predicción de la función de verosimilitud logarítmica construida con el aplicación del filtro de Kalman. Sin embargo, como  $\xi_t = \ln(\varepsilon_t^2)$  no está normalmente distribuida, el filtro de Kalman solo provee estimadores lineales minimizadores del error cuadrático medio de la variable de estado y de las observaciones futuras. Sin embargo, la verosimilitud logarítmica exacta no puede ser calculada a partir de la descomposición del error de predicción basada en el filtro de Kalman. Los estimadores de  $\Omega = (\gamma, \phi, \sigma_\eta^2)$  obtenidos de tratar a  $\xi_t$  como si fuera  $\xi_t \square \text{ iid } N(0, \pi^2/2)$  y de maximizar la función de cuasi-verosimilitud, son estimadores consistentes, pero ineficiente. La estimación del filtro de Kalman se realizará en este trabajo con el software econométrico EViews 10.

### 3.2 Estimación mediante método de Monte Carlo basado en Cadenas de Markov (MCMC)

Se trata de métodos que muestrean la distribución posterior en forma indirecta. Entre ellos se encuentran. Entre los métodos más utilizados se encuentran el Algoritmo de Metropolis-Hastings y el muestreador de Gibbs. En nuestro caso utilizaremos este último. Esencialmente el muestreador de Gibbs procede de la siguiente forma: Si se desea generar muestras de la distribución conjunta de un proceso estocástico

$$(Y_1, \dots, Y_k) \in R$$

y es posible generar cada una de las distribuciones condicionales completas

$$Y_{-i} = (Y_1, \dots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \dots, Y_k)$$

1. Se especifica un valor inicial  $(Y_1^{(0)}, \dots, Y_k^{(0)})$  para  $(Y_1, \dots, Y_k)$

2. Para todo  $s > 0$  hasta la cantidad de iteraciones deseada  $n$  se genera  $Y_i^{(s)}$  a partir de su distribución condicional dado

$$Y_i^{(s)} = (Y_1^{(s)}, \dots, Y_{i-1}^{(s)}, Y_{i+1}^{(s-1)}, \dots, Y_k^{(s-1)}) \quad \text{para cada } i = 1 \text{ hasta } k$$

Puede demostrarse que en condiciones bastante generales

$$(Y_1^{(s)}, \dots, Y_k^{(s)})$$

converge a la distribución conjunta de  $(Y_1, \dots, Y_k)$  cuando  $S \rightarrow \infty$

Por lo tanto, el muestreador de Gibbs proporciona un método aproximado de muestreo de la distribución.

Además  $\frac{1}{n} \cdot \sum_{s=1}^n (Y_1^{(s)}, \dots, Y_k^{(s)})$  converge a  $E[(Y_1, \dots, Y_k)]$

y similarmente para la varianza.

En este trabajo se utilizará un paquete de programas denominado **stochvol**, realizado por Gregor Kastner que corre en el programa **R**, de código abierto. Este programa permite estimar el modelo de volatilidad estocástica mediante el muestreador de Gibbs, pudiendo especificarse los valores iniciales de las distribuciones a priori, la cantidad de repeticiones del muestreador, de extracciones no utilizadas al inicio del muestreo y la proporción de extracciones que se utilizan finalmente (se estila conservar sólo una extracción de cada 20 para reducir la autocorrelación en la muestra definitiva).

## 4 Comparación de estrategias de estimación

### 4.1 Estimación de series simuladas

El método que se utilizará para comparar ambas estrategias de estimación será generar observaciones con parámetros conocidos y evaluar cuál de las dos aproxima mejor a los valores “verdaderos” de los parámetros.

Se compararán estimaciones con 1000, 500 y 200 observaciones para verificar si la calidad de la estimación con cada método depende del tamaño de la muestra. En principio, dado que la estimación de los parámetros con el filtro de Kalman es consistente, se espera que este método brinde estimaciones más cercanas a los valores inicializados cuando se trabaja con muestras grandes. En el caso de muestras pequeñas, se espera que el método MCMC tenga el mejor desempeño.

Modelo de prueba:

$$r_t = \sigma_t^2 \cdot \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \square iid N(0,1)$$

$$\ln \sigma_t^2 = h_t = \mu + \phi(h_{t-1} - \mu) + \eta_t \quad \eta_t \square iid N(0, \sigma_\eta^2)$$

$$\text{Con } \mu = -0.4 \quad \phi = 0.9 \quad \sigma_\eta = 0.2$$

### Estimación mediante Filtro de Kalman:

Señal:  $y_t = -1,27 + h_t + \xi_t \quad \xi_t \square iid (0, \pi^2/2)$

Ecuación de estado  $h_t = \mu + \phi \cdot (h_{t-1} - \mu) + \eta_t \quad \eta_t \square iid N(0, \sigma_\eta^2)$

Se genera una serie de 100.000 observaciones con los parámetros fijados como se indica más abajo y se van tomando de a 1000 en 1000, de a 500 y finalmente de a 200. Esta secuencia tiene el sentido de ir tomando distintas realizaciones aleatorias del proceso simulado.

Se realizan 100 estimaciones, que son las que agotan la muestra para el caso de 1000 datos. Finalmente se obtiene la media y la mediana de las 100 estimaciones. Los resultados se consignan en la Tabla 1.

Tabla 1. Estimaciones con el filtro de Kalman

n	resumen estimaciones	mu	phi	c(3)	sigma = exp(c(3)/2)
1000	media	-0,3865	0,7635	-3,9080	0,1417
	mediana	-0,3896	0,8953	-3,2084	0,2011
500	media	-0,3838	0,4925	-5,8975	0,0524
	mediana	-0,3786	0,7346	-3,1659	0,2054
200	media	-0,3881	0,1959	-7,1780	0,0276
	mediana	-0,3776	0,3334	-2,7559	0,2521

### Estimación mediante MCMC

Se realiza la estimación con el paquete **stochvol** que corre en el software **R** de código abierto. Tal como en el caso anterior se estiman varias longitudes de muestras. Las distribuciones a priori de los parámetros son:

$\mu$  : Distribución Normal (-1 , 1), donde el primer valor indica la media y el segundo el desvío estándar

$\phi$  : Distribución Beta (20 , 1.5) con media aproximada 0,86 y desvío estándar 0,11

$\sigma_\eta$  : Distribución Chi cuadrado con un grado de libertad, multiplicada por el parámetro 0,1

El resto de la especificación indica la cantidad de extracciones, “draws” (100.000), la cantidad de extracciones iniciales que se descartan, denominadas “burn in” (1000), no incluidas en “draws” y la cantidad de extracciones que se descartan entre dos que se conservan, “thin” (20). Por tanto habrá 5000 extracciones válidas en cada cadena.

```
res <- svsample(ret, draws=100000, burnin=10000, priormu = c(-1, 1), priorphi = c(20, 1.5), priorsigma = .1, thinpara=20, thinlatent=20)
```

Los resultados obtenidos se consignan en la Tabla 2.

**Tabla 2.** Estimaciones MCMC

n	resumen estimaciones	mu	phi	sigma
1000	media	-0,4135	0,8770	0,2162
	mediana	-0,4241	0,8827	0,2011
500	media	-0,4289	0,8536	0,2421
	mediana	-0,4166	0,8693	0,2124
200	media	-0,4404	0,8585	0,2204
	mediana	-0,4702	0,8568	0,2051

Si se analizan los valores encontrados se verifica que la estimación de la media  $\mu$  es mas precisa con el filtro de Kalman, mientras que en el caso del coeficiente autorregresivo  $\phi$  y el desvío estándar  $\sigma_{\eta}$ , la estimación MCMC es claramente superior.

No se verifica una diferencia en la precisión de la estimación vinculada a la longitud de la muestra, como se postuló inicialmente.

#### 4.2 Estimación de una serie empírica

Otra verificación a realizar será la estimación del modelo SV para el caso de una serie empírica, para lo cual se utilizarán los retornos del índice Merval

La determinación del mejor modelo se realizará mediante la evaluación de los pronósticos de volatilidad a un período. Se contabilizarán varios estadísticos de bondad del pronóstico: Raíz del error cuadrático medio (RMSE), error absoluto medio (MAE) y coeficiente de Theil.

La serie fue extraída de la página Yahoo finanzas (<https://es-us.finanzas.yahoo.com/quote/%5EMERV/>) y corresponde a los valores del índice Merval entre las fechas 2-enero-2013 y 5-Junio-2019. En total son 1558 observaciones del valor al cierre, con lo cual se pueden obtener 1557 retornos diarios.

Se realizan estimaciones mediante el filtro de Kalman y el método MCMC y como forma de comprobar cuál de dichas estimaciones es mejor, al desconocerse el verdadero valor de los parámetros, debemos decidir por medio de estadísticos de bondad del pronóstico. Se estima la muestra completa, se predice dentro de la muestra la volatilidad y se la compara, a falta del verdadero valor de la misma, (inobservable) con el cuadrado de los retornos. Los resultados se consignan en la Tabla 3.

Período	n	RMSE		MAE		Theil	
		Kalman	MCMC	Kalman	MCMC	Kalman	MCMC
Muestra completa	1557	0,0009	0,00179	0,000456	0,000892	0,639602	0,467228

Figura

1. Estimaciones con el filtro de Kalman

Como puede observarse, al menos en el caso de esta serie empírica, la estimación por filtro de Kalman presenta mejores resultados para RMSE y MAE, aunque no para Theil.

## 5 Conclusiones

En este trabajo se ha abordado la estimación bayesiana de los modelos de volatilidad estocástica, llegando a la conclusión de que, a pesar de que la estimación de los parámetros es comparable y en casos mejor que la estimación cuasi-máximo verosímil del filtro de Kalman, el pronóstico de la volatilidad es deficiente.

Como próximos pasos se propone seguir investigando programas de estimación y pronóstico que permitan mejorar los resultados alcanzados.

Otra dirección para futuras investigaciones es la incorporación de nuevas formas funcionales, incluyendo apalancamiento y proceso autorregresivo en la media de las series.

## 6 Bibliografía

Chib, S. (1995) Marginal likelihood from the Gibbs output. *Journal of the American Statistical Association*, Vol.90, pag. 1313-1321

Chib, S., Nardari, F. y Shephard, N. (2002) Markov chain Monte Carlo methods for stochastic volatility models. *Journal of Econometrics*, Vol. 108, pag. 281-316

Geweke, J. (1989) Bayesian Inference in Econometric Models Using Monte Carlo Integration. *Econometrica*, Vol. 57, No. 6, pag. 1317-1339

Hastings, W. (1970) Monte Carlo sampling methods using markov chains and their applications. *Biometrika*, Vol. 57, pag. 97-109

Kim, S., Shephard, N. y Chib, S. (1998) Stochastic Volatility: likelihood inference and comparison with ARCH models. *Review of Economic Studies*, Vol. 65, pag. 361-393

Meyer, R y Yu, J (2000) BUGS for a Bayesian analysis of stochastic volatility model. *Econometric Journal*, Vol. 3, pag.. 1