103 ECUACIONES DIFERENCIALES DE 1º ORDEN: RESOLUCION DEL MODELO DE LA ESTABILIDAD DINÁMICA DEL EQUILIBRIO

García Venturini, Alejandro
Facultad de Ciencias Económicas – UBA
aegv@hotmail.com

Especialidad: Matemática Aplicada

Palabras Claves: Ecuaciones diferenciales, Dinámica económica, Variable continua

Resumen

En los problemas económicos, en los cuales, su comportamiento es función del tiempo, se da lugar a la formación de ecuaciones funcionales en las que sus variables y resultados están determinados moviéndose temporalmente dando lugar a sistemas dinámicos que se analizan y resuelven en la disciplina de la Dinámica Económica.
En cada fenómeno económico de esta Dinámica Económica, en la cual la variable independiente es el tiempo, ésta puede tener una variación continua constituyendo un problema de dinámica continua y las ecuaciones funcionales que se plantean son ecuaciones diferenciales ordinarias.
Este modelo propuesto por G. C. Evans, corresponde a un mercado particular para un determinado satisfactor en el que las ecuaciones de demanda y de oferta son las mismas que las del modelo lineal ordinario y pueden resolverse en la forma usual para obtener el precio de equilibrio.
El objetivo del modelo es demostrar que el precio de un producto, a lo largo del tiempo, tiende a su precio de equilibrio. Si el precio en un instante inicial (p0) es mayor que el precio de equilibrio (pe), el precio tiende a bajar, en busca del precio de equilibrio. Si por el contrario, p0 es menor que pe, el precio tiende a subir también en busca del equilibrio.
En este caso se plantea una ecuación diferencial que admite más de una forma de resolución. De esta manera se propone un ejemplo cuya resolución permite indagar en distintos métodos de resolución de ecuaciones diferenciales.
Este modelo es buen ejemplo para justificar la inclusión de las ecuaciones diferenciales en un programa de Análisis Matemático II.

1. Introducción

Planteamos en este trabajo una aplicación de las ecuaciones diferenciales de primer orden orientado al modelo de la estabilidad dinámica del equilibrio. Previamente recordamos algunos conceptos básicos del tema.

1.1 Ecuaciones diferenciales de primer orden

Las ecuaciones diferenciales pueden ser fundamentalmente de dos tipos: 1) las ordinarias: si interviene solo una variable independiente, 2) en derivadas parciales si intervienen dos o más variables.

Para el caso 1) el orden lo determina el orden de la derivada de mayor orden y el grado es el mayor exponente que afecta a la derivada de mayor orden.

Ejemplo:

$$3y''^2 + 5(y')^4 + y = 0 \quad (1)$$

Es una ecuación diferencial de grado 2 y orden 2.
En este modelo se plantean ecuaciones diferenciales de primer orden. Planteamos los dos casos que se pueden utilizar en la resolución del modelo:
Variables separables

La expresión general es

$$y' = \frac{P(x)}{Q(y)} \quad (2),$$

que se resuelve separando las variables.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x)}{Q(y)} \quad (3)$$

$$Q(y).dy = P(x).dx \quad (4)$$

$$\int Q(y).dy = \int P(x).dx \quad (5)$$

Lineal

La expresión general es

$$y' + P(x).y = Q(x) \quad (6)$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas de x.

La solución la constituyen todas las funciones $y = f(x)$ que satisfagan la ecuación. Para resolverla se recurre a un cambio de variables: $y = u.v$, donde u y v son funciones de x. Debemos calcular $u(x)$ y $v(x)$, luego efectuando su producto se obtiene la función y que es la solución general.

Si

$$y = u.v \Rightarrow y' = u'.v + u.v'. \quad (7)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial queda:

$$u'.v + u.v' + P(x).u.v = Q(x) \quad (8)$$

Sacamos factor común entre el 1º término y el 3º término:

$$v.[u' + P(x).u] + u.v' = Q(x) \quad (9)$$

Elegimos $u(x)$ de tal forma que:

$$u' + P(x).u = 0 \quad (10)$$

$$\frac{du}{dx} = -P(x).u \quad (11)$$

$$\frac{du}{u} = -P(x).dx \quad (12)$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int P(x).dx \quad (13)$$

$$ln\, u = -\int P(x).dx \quad (14)$$

$$u = e^{-\int P(x).dx} \quad (15)$$

Ahora debemos determinar cuánto vale $v(x)$:

$$u.v' = Q(x) \quad (16)$$

$$e^{-\int P(x).dx}.\frac{dv}{dx} = Q(x) \quad (17)$$

$$dv = e^{\int P(x).dx}.Q(x).dx \quad (18)$$

$$\int dv = e^{\int P(x).dx}.Q(x).dx \quad (19)$$

$$v = \int e^{\int P(x).dx}.Q(x).dx \quad (20)$$

por lo tanto la solución general es:

$$y = u.v = e^{-\int P(x).dx}.\left[\int e^{\int P(x).dx}.Q(x).dx + C\right] \quad (21)$$

2. Modelo de la estabilidad dinámica del equilibrio

Este modelo propuesto por G. C. Evans, corresponde a un mercado particular para un determinado satisfactor en el que las ecuaciones de demanda y de oferta son las mismas que las del modelo lineal ordinario y pueden resolverse en la forma usual para obtener el precio de equilibrio.

El objetivo del modelo es demostrar que el precio de un producto, a lo largo del tiempo, tiende a su precio de equilibrio. Si el precio en un instante inicial (p_0) es mayor que el precio de equilibrio (p_e), el precio tiende a bajar, en busca del precio de equilibrio. Si por el contrario, p_0 es menor que p_e, el precio tiene a subir, también en busca del precio de equilibrio.

Suponemos las siguientes funciones lineales de demanda (D) y oferta (S).

$$\begin{cases} D = a - bp \\ S = -c + dp \end{cases} \quad (22)$$

con a, b, c y $d > 0$

Buscamos el precio de equilibrio

$$a - bp = -c + dp \quad (23)$$

$$p_e = \frac{a+c}{b+d} \quad (24)$$

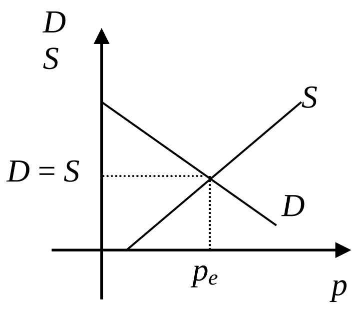

Figura 1. El punto de equilibrio

El modelo supone que la tasa de cambio del precio en el tiempo es directamente proporcional al excedente de la demanda:

$$\frac{dp}{dt} = k\left(D - S\right) \quad (25) \quad \text{con } k > 0.$$

Si $D - S > 0$, la derivada es positiva, es decir que si el excedente de la demanda es positivo, el precio tiende a aumentar. Por el contrario si $D - S < 0$, la derivada es negativa y el precio tiende a bajar. En ambos casos, como ya vimos, en busca del precio de equilibrio.

Para justificar lo que plantea el modelo debemos buscar la trayectoria temporal [p (t)] y demostrar que cuanto $t \to +\infty$, $p \to p_e$.

3. Desarrollo del Modelo de la estabilidad dinámica del equilibrio

Para eso desarrollamos y resolvemos la ecuación diferencial (25), de tal manera de poder obtener la función $p(t)$, llamada trayectoria temporal. Reemplazamos D y S por sus respectivas expresiones.

$$\frac{dp}{dt} = k.\left[a - bp - \left(-c + dp\right)\right] \quad (26)$$

$$\frac{dp}{dt} = k.\left[\left(a + c\right) - \left(b + d\right)p\right] \quad (27)$$

$$\frac{dp}{dt} + k.\left(b + d\right)p = k.\left(a + c\right) \quad (28)$$

4. Solución del problema

Vemos que estamos frente a una ecuación diferencial. Una posibilidad es pensarla como lineal, donde:

$$P(t) = k(b + d) \text{ y } Q(t) = k(a + c) \quad (29)$$

$$p(t) = u.\,v \quad (30)$$

$$u = e^{-\int k(b+d)dt} = e^{-k(b+d)t} \quad (31)$$

$$v = \int e^{k(b+d)t}.k\left(a + c\right)dt \quad (32)$$

$$= k\left(a + c\right).\int e^{k(b+d)t}dt \quad (33)$$

$$= k\left(a + c\right)\frac{e^{k(b+d)t}}{k\left(b + d\right)} + \mathrm{C} \quad (34)$$

$$p\left(t\right) = e^{-k(b+d)t}.\left(p_e.e^{k(b+d)t} + \mathrm{C}\right) = p_e + e^{-k(b+d)t}.\mathrm{C} \quad (35)$$

Como

$$p(0) = p_0 \quad (36)$$

$$p_0 = p_e + \mathrm{C} \quad (37)$$

$$\mathrm{C} = p_0 - p_e \quad (38)$$

$$p\left(t\right) = p_e + e^{-k(b+d)t}.\left(p_0 - p_e\right) \quad (39)$$

Hemos hallado la trayectoria temporal, debemos ahora calcular el límite cuando $t \to +\infty$.

$$\lim_{t\to+\infty}\left[p_e+e^{-k(b+d)t}.(p_0-p_e)\right]=p_e \quad (40)$$

Con lo que se demuestra que el precio, a lo largo del tiempo, busca el equilibrio. Veamos ahora el gráfico de la trayectoria temporal.

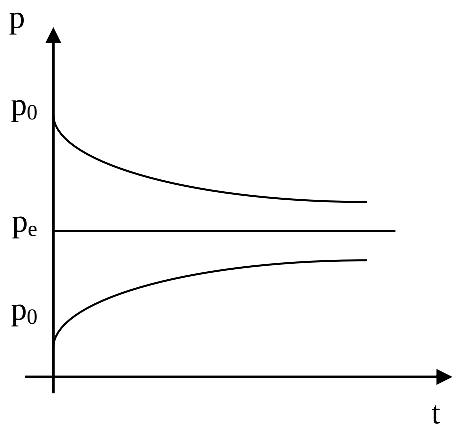

Figura 2. Representación de la trayectoria temporal

5. Otra forma de resolución

Lo interesante de este caso es que la ecuación diferencial que queda planteada admite una forma alternativa de resolución:

$$\frac{dp}{dt}+k.(b+d)\,p=k.(a+c) \quad (41)$$

$$\frac{dp}{dt}=k.(a+c)-k.(b+d)\,p \quad (42)$$

$$\frac{dp}{k.(a+c)-k.(b+d)\,p}=dt \quad (43)$$

$$\int\frac{dp}{k.(a+c)-k.(b+d)\,p}=\int dt \quad (44)$$

$$\frac{ln\left[k.(a+c)-k.(b+d)\,p\right]}{-k.(b+d)}=t \quad (45)$$

$$ln\left[k.(a+c)-k.(b+d)\,p\right]=-k.(b+d).t+C \quad (46)$$

$$k.(a+c)-k.(b+d)\,p=e^{-k.(b+d).t}.C \quad (47)$$

$$k.(a+c)-e^{-k.(b+d).t}.C=k.(b+d)\,p \quad (48)$$

$$p=\frac{k.(a+c)}{k.(b+d)}-\frac{e^{-k.(b+d).t}.C}{k.(b+d)} \quad (49)$$

$$p = p_e - \frac{e^{-k.(b+d).t}.\mathrm{C}}{k.(b+d)} \quad (50)$$

Como

$$p\,(0) = p_0 \quad (51)$$

$$p_0 = p_e - \frac{\mathrm{C}}{k.(b+d)} \quad (52)$$

$$\mathrm{C} = (p_e - p_0).k.(b+d) \quad (53)$$

$$p(t) = p_e - \frac{e^{-k.(b+d).t}.(p_e - p_0).k.(b+d)}{k.(b+d)} \quad (54)$$

$$p(t) = p_e - e^{-k.(b+d).t}.(p_e - p_0) \quad (37) \quad (55)$$

Hemos hallado la trayectoria temporal, debemos ahora calcular el límite cuando $t \to +\infty$.

$$\lim_{t\to+\infty} \left[p(t) = p_e - e^{-k.(b+d).t}.(p_e - p_0) \right] = p_e \quad (56)$$

Hemos llegado a lo mismo que cuando resolvimos la ecuación diferencial como lineal.

6. Conclusiones y trabajos futuros

Las ecuaciones diferenciales permiten modelizar muchas situaciones que se presentan en la dinámica continua.

A futuro la idea es seguir buscando situaciones de la economía donde las ecuaciones diferenciales resulten de utilidad para su modelización y resolución y además son interesantes aquellas que admiten más de una forma de resolución. De esta manera se ve que no siempre hay una sola forma de resolver un problema.

Referencias

Casparri, María Teresa y otros (1973), *Análisis Matemático II*, Buenos Aires: El Coloquio.

Chiang, Alpha (1974), *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, Nueva York: McGraw Hill

Di Caro, Héctor (1979), *Análisis Matemático II con aplicaciones a la Economía*, Buenos Aires: Club de estudio.

Ferguson, C. E: y Gould, J. P. (1983), *Teoría Microeconómica*, Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica de México.

Finocchiaro, María (1988), *Funzioni di piu variabili*, Roma: CISU.

Henderson, J.M. y Quandt, R.E (1985), *Teoría Microeconómica*, Barcelona: Ariel.

Larson, Roland y Hostetler, Robert (1986), *Cálculo y Geometría Analítica*, España: Mc Graw Hill.

Leithold, Louis (1992), *El Cálculo con geometría analítica*, México DF: Harla.

Rabuffetti, Hebe T. (1983), *Introducción al Análisis Matemático* (*Cálculo 2*), Buenos Aires: El Ateneo.

Steward, James (1993), *Calculus*, Nelmont, USA:Wadsworth PWS Publishers.

Weber, Jean (1993), *Matemáticas para administración y economía*, México DF: Harla.