

## **107 LA MATEMÁTICA DETRÁS DE LA ESTRUCTURA PIRAMIDAL DE NEGOCIOS: UNA APLICACIÓN DE PROGRESIONES GEOMÉTRICAS**

Caviezel, Pablo

Facultad de Ciencias Económicas – Universidad de Buenos Aires

[pcaviezel@economicas.uba.ar](mailto:pcaviezel@economicas.uba.ar)

**Especialidad:** Matemática Aplicada

**Palabras Claves:** progresión – geométrica – sucesión – piramidal

### **Resumen**

La búsqueda de aplicaciones económicas en las materias iniciales se convierte en una tarea difícil cuando se trata de innovar o salir del campo de las aplicaciones tradicionales. Es en este sentido que intento, con esta ponencia contribuir con una aplicación, sencilla, pero vinculada con el campo de la Administración y la Economía: los esquemas piramidales. Un esquema piramidal puede definirse como una modalidad de negocio orientado a captar clientes ofreciéndoles una alternativa de inversión que promete rentabilidades altas y supuestamente garantizadas. El esquema funciona a partir de una serie de “rondas” de clientes donde las ganancias empiezan supuestamente a aparecer cuando un cliente atrajo al negocio a otros clientes que generaron beneficios. La sustentabilidad del negocio se pone en duda cuando una “importante proporción de clientes” no ve beneficios. Es objetivo de este trabajo presentar algunos ejemplos de modelos de negocios de esquema piramidal desde el punto de vista de la matemática de las progresiones geométricas y calcular, en la medida que los supuestos y los datos lo permitan una cota mínima para la proporción de clientes que no ve beneficios, bajo distintas modalidades.

### **Introducción**

El objetivo de este trabajo es presentar algunos ejemplos de modelos de negocios de esquema piramidal desde el punto de vista de la matemática de las progresiones geométricas y dilucidar, en la medida que los supuestos y los datos lo permitan la proporción de agentes participantes del negocio que no obtienen ningún tipo de rentabilidad por ingresar al mismo.

Para lograr el objetivo propuesto, en una primera parte del trabajo, se fundamenta esta propuesta en relación con la temática de las Jornadas Nacionales para las cuales el mismo se presenta. Seguidamente, se presenta una breve caracterización de los modelos de negocio de esquema piramidal. Precede al cálculo matemático propiamente dicho una serie de ejemplos numéricos de estos esquemas, acompañados de una evaluación de sus alcances y limitaciones.

La matemática involucrada en los cálculos se supone, por supuesto, conocida por el público a quien va dirigida esta propuesta, por lo que se optó por dejar los planteos más relevantes.

El propósito final del trabajo es contribuir con una aplicación directa de la matemática relacionada con el ámbito de las ciencias de la Administración y la Economía, y fundamentalmente vigente al día de hoy.

### **Fundamentación**

La búsqueda de aplicaciones económicas en las materias iniciales se convierte en una tarea difícil cuando se trata de innovar o salir del campo de las aplicaciones tradicionales. Es en este sentido que intento, con esta ponencia contribuir con una aplicación, sencilla, pero vinculada con el campo de la Administración y la Economía.

Somos testigos de la invasión de empresas con esquema piramidal en el mercado; basta citar los conocidos ejemplos de Herbalife, PSA, Nu Skin, Amway y tantas otras que prometen grandes beneficios a partir de la captación e

incorporación de clientes. Detrás de la operatoria para el cálculo del número de participantes, los beneficios y las probabilidades de cobrar se esconden modelos matemáticos propios de las primeras materias de la formación académica del alumno universitario de carreras afines a la Administración y a la Economía.

## Desarrollo

Un esquema piramidal puede definirse como una modalidad de negocio orientado a captar clientes (en adelante, “participantes”) ofreciéndoles una alternativa de inversión que promete rentabilidades altas y supuestamente garantizadas. El esquema funciona a partir de una serie de “rondas” o “capas” (en adelante, “niveles”) de participantes. Así, el primer nivel de participantes en general recibe algún pago que le inspira confianza y las rentabilidades de los siguientes niveles se pagan con aportes de los mismos participantes de diferentes niveles. Una característica distintiva es que cada nivel debe tener más participantes que el anterior, de ahí su nombre de esquema piramidal. Así; en la medida que el modelo se vuelve popular, aumenta el número de participantes inversionistas, así como también los montos que éstos invierten. El esquema avanza de forma tal que si un porcentaje importante de los participantes decidiese retirar o rescatar su inversión, la empresa no podría pagar a todos en simultáneo (López y López, 2016).

Básicamente, se distinguen dos tipos de pirámides. Las pirámides abiertas son aquellas en las que los participantes conocen la estructura del negocio y apuestan a estar lo suficientemente arriba en la pirámide como para percibir beneficios antes del punto de saturación, entendido como aquel momento en que el esquema no dispone del dinero para pagar los rescates de inversiones. Las pirámides cerradas, en cambio, se caracterizan por una cúpula formada por una sola persona (o institución) que recibe los aportes de los participantes y promete rentabilidades atractivas tras la gestión de la cartera de inversiones. Estas inversiones; no obstante, no existen y el capital inicial de todos los participantes se utiliza para pagar el capital final de unos pocos participantes.

Las estafas piramidales tienen más de un siglo de historia y han trascendido fronteras. El caso más conocido corresponde al “esquema Ponzi”, un tipo de esquema de pirámide cerrada.

Pero... ¿Qué es lo que hace una pirámide ilegal? ¿Y por qué tanta controversia a su alrededor?

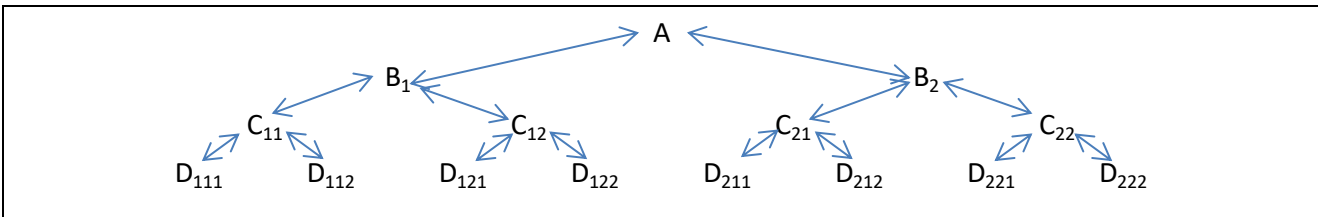
Por definición, un esquema piramidal resulta ilegal cuando involucra una progresión geométrica de nuevos participantes, cuyas “comisiones de entrada” no alcanzan para cubrir el valor que se recibirá (o algún bien/servicio equivalente a esta comisión). Para satisfacer requerimientos legales, estos esquemas ofrecen bienes o servicios con un valor inflado a prácticamente costo cero. Por ejemplo, el esquema podría “vender” 8 libros a los nuevos miembros, cada uno “valuado” a \$ 100 y entonces proveer un valor total de \$ 800 por un costo que podría haber sido el de \$ 20 por libro. En definitiva, estos esquemas que no proveen a sus participantes con rentabilidades que cubran su comisión de membresía resultan en que la mayoría de sus participantes pierden dinero (Kitchin, 2001).

Son múltiples, además, los casos de compañías demandadas por sus participantes y, además, ya hay múltiples técnicas para lograr armar los expedientes judiciales de manera idónea para poder hacer frente, por vías judiciales, a los perjuicios ocasionados (Coenen, 2009); pero, al mismo tiempo, las compañías que ofrecen este tipo de servicio se defienden sosteniendo que sus estructuras no son piramidales y que responden a un concepto de marketing bien definido y que de ninguna manera constituye un fraude: el marketing multinivel (Taylor, 2011). Sea cual sea la realidad, nos abocamos ahora a los números que rigen estos esquemas.

**Resultados**

Es prácticamente intuitiva la matemática que hay por detrás de la expresión más simple de este tipo de negocios. No obstante, es importante repasarla para poder avanzar hacia sistemas más complejos.

La versión más simple de estos modelos se conoce como “**chain letter**”, y para ponerlo en forma didáctica, digamos que una persona A, que origina el primer nivel, le envía una carta (un mensaje) a dos personas B<sub>1</sub> y B<sub>2</sub> (segundo nivel) pidiéndoles a cada uno de ellos que le envíen \$ 1 y que a su vez, cada uno de ellos le escriba una carta (un mensaje) a dos de sus amigos haciendo lo mismo. De forma tal que B<sub>1</sub> le enviará un mensaje a C<sub>11</sub> y a C<sub>12</sub> y por su parte B<sub>2</sub> le enviará un mensaje a C<sub>21</sub> y a C<sub>22</sub>. De esta forma, el nivel A está constituido por un participante, el nivel B por dos participantes, el nivel C por cuatro participantes y así sucesivamente la progresión geométrica de razón igual a 2.

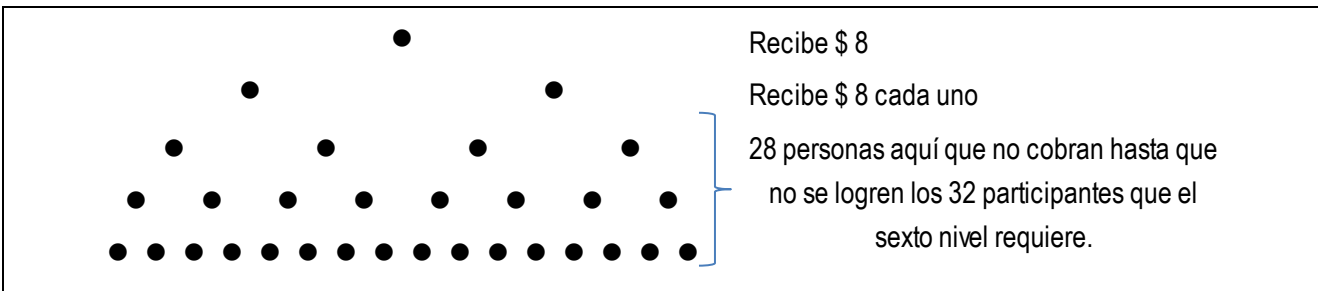


**Figura 1.** Chain letter. Esquema de participantes

Fuente: elaboración propia

Respecto del flujo de dinero, A recibe \$ 2 (es decir, \$ 1 de B<sub>1</sub> y \$ 1 de B<sub>2</sub>) sin ningún esfuerzo a cambio. B<sub>1</sub>, por su parte, recibe \$ 2 en total (de sus dos contactos C<sub>11</sub> y C<sub>21</sub>), pero si le restamos \$ 1 que previamente entregó a A, resulta que B<sub>1</sub> “ganó en la operación” \$ 1 (y análogo análisis para B<sub>2</sub>). Prosiguiendo la misma lógica, cada participante recibirá \$ 2 pero deberá enviar \$ 1 “hacia atrás”, por lo que recibirá \$ 1 en concepto de “ganancia”. En este tipo de cadenas el número de participantes aumenta exponencialmente y en general se suele maldecir a quien rompa “la cadena”.

Otro modelo frecuente es el llamado **modelo de 8 nodos**. Aquí, la esencia es que los participantes deben pagar una “comisión” pero no reciben ningún pago hasta que se hayan completado tres niveles nuevos por debajo de su nivel. Entonces, A invita a dos participantes B<sub>1</sub> y B<sub>2</sub>, quienes a su vez invitan a dos participantes C cada uno (luego el nivel C ya tiene 4 participantes) y cada uno de ellos invita a dos participantes con lo que el nivel D, completo, consta de 8 participantes. Si se supone una comisión de \$ 1; entonces los \$ 8 pagados por todos los miembros del nivel D le son pagados al participante A. Cuando los 16 participantes del nivel E son invitados, cada una de las dos personas del nivel B recibirán \$ 8 de su grupo. La atracción de este sistema por encima del esquema “chain letter” es que el pago es mayor.



**Figura 2.** Modelo de 8 pelotas

Fuente: elaboración propia.

Para empezar, los tres niveles inferiores de la pirámide siempre pierden dinero y, tal como se demostrará a continuación, al menos un 87,5 % del total de participantes perderá su dinero.

Definamos con  $k$  a la cantidad de niveles de la pirámide y con  $n_i$  al número total de participantes en el  $i$ -ésimo nivel, de forma tal que  $n$  sea el número total de participantes en todos los niveles.

En el primer nivel, el superior,  $n_1 = 1$

En el segundo nivel,  $n_2 = 2$

En el tercer nivel,  $n_3 = 4$

Y, en general, el  $i$ -ésimo nivel estará formado por  $2^{i-1}$  participantes.

El número total de participantes del esquema está dado por:

$$n = \sum_{i=1}^k 2^{i-1} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^k = 2^k - 1$$

Si hubiera solamente uno o dos niveles y no se consigue expandir la pirámide, todos sus participantes resultan perdedores. A partir de que el número de niveles sea 3, serán los tres niveles inferiores  $k$ ;  $k-1$  y  $k-2$  (quienes tienen respectivamente  $n_k$ ;  $n_{k-1}$ ;  $n_{k-2}$  participantes) los que resultarán perdedores en este esquema de 8 pelotas, por lo que la proporción  $p$  de participantes que pierden su dinero respecto del total de participantes está dado por:

$$p = \frac{n_k + n_{k-1} + n_{k-2}}{n}$$

Desarrollando esta expresión:

$$p = \frac{2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3}}{2^k - 1} = \frac{2^{k-3}(4 + 2 + 1)}{2^k \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)} = \frac{2^k \cdot 2^{-3} \cdot 7}{2^k \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)} = \frac{\frac{7}{8}}{1 - \frac{1}{2^k}}$$

Es decir,

$$p = 1 \quad \text{si } k \leq 3$$

$$p = \frac{\frac{7}{8}}{1 - \frac{1}{2^k}} \quad \text{si } k \geq 4$$

Resulta evidente que la proporción  $p$  disminuye a medida que aumenta la cantidad de participantes pero siempre se encuentra por encima de  $\frac{7}{8}$ , por lo que más del 87,5 % de sus participantes estaría perdiendo dinero con este esquema.

En el **esquema 2-up**, los “ingresos por ventas” de los primeros dos participantes que uno recluta se dirigen a la persona que reclutó a éste. Es decir: supongamos que el participante A incorporó en el negocio al participante B y éste, a su vez, incorporó al negocio a los participantes  $C_1$  y  $C_2$ . Los márgenes de ganancia de las ventas generadas por estos dos últimos participantes serán cobrados por el participante A. Ahora bien, si el participante B hubiera conseguido más de dos participantes, los márgenes de venta de estos adicionales, así como también los márgenes de venta de los primeros dos participantes que ellos incorporen al negocio (nivel D) son recolectados por el participante B. Este sistema es muy popular porque los ingresos de una persona pueden crecer exponencialmente y por el gran incentivo que hay para conseguir un “tercer” participante.

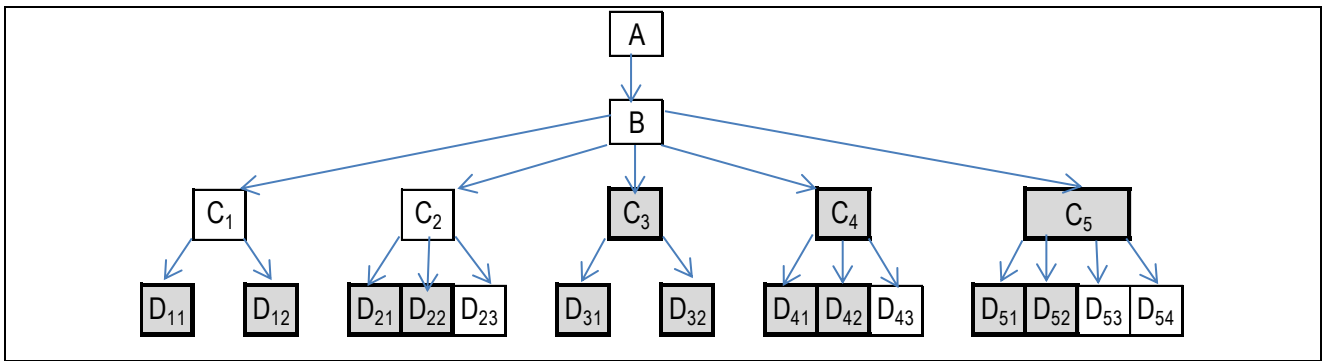


Figura 3. Esquema 2-up

Fuente: elaboración propia.

La Figura 3 se ha elaborado desde el punto de vista de un participante B. Es decir, B es ingresado al negocio por el participante A y, a su vez, B ha incorporado al negocio cinco participantes: C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub>, C<sub>4</sub> y C<sub>5</sub>; en ese orden. Todas las ganancias por ventas que logren C<sub>1</sub> y C<sub>2</sub> serán para el participante A, y como no revisten de interés para el participante B, no se han coloreado. Sin embargo, las ganancias obtenidas por C<sub>3</sub>, C<sub>4</sub> y C<sub>5</sub> son para el participante B, así como también todos los beneficios por ventas de los dos primeros “nietos” que le dé cada “hijo”. De esta forma B se apropia de los beneficios de todos los participantes que han sido coloreados. Este esquema, al igual que el esquema de 8 pelotas, involucra una progresión geométrica donde para obtener la menor ganancia cada nivel que se agrega es tres veces superior al nivel anterior, tal como se ve en la Figura 4.

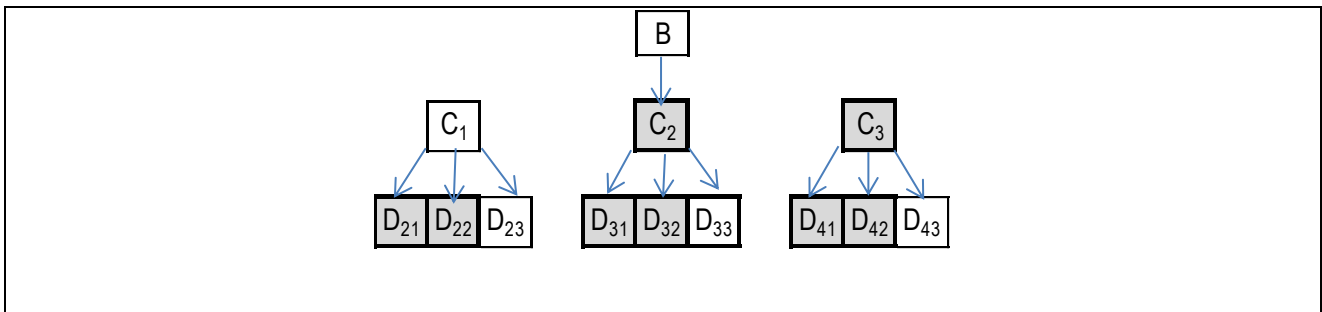


Figura 4. Esquema 2-up

Fuente: elaboración propia.

Si el “producto” no es tan atractivo o no ofrece posibilidades de ser vendido por muchas veces a la misma persona el esquema no prospera. Matemáticamente, habrá más del 66 % de toda la estructura de participantes que perderán todo su dinero en este esquema, tal como se muestra a continuación.

Vamos a suponer que cada participante trae 3 y sólo 3 personas a su negocio, de forma tal que empiece a poder vislumbrar ganancias, tal como indica la Figura 4.

En el primer nivel, el superior,  $n_1 = 1$

En el segundo nivel,  $n_2 = 3$

En el tercer nivel,  $n_3 = 9$

En el cuarto nivel,  $n_4 = 27$

Y, en general, el  $i$ -ésimo nivel estará formado por  $3^{i-1}$  participantes.

El número total de participantes del esquema está dado por:

$$n = \sum_{i=1}^k 3^{i-1} = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^k = \frac{3^k - 1}{2}$$

Si hubiera sólo un nivel, éste pierde todo su dinero. Si hubiera dos niveles y el segundo nivel tuviera, tal como indica la Figura 4 y como se viene suponiendo, tres participantes, sólo 1 de los 4 estaría obteniendo las ganancias. Para el caso de 3 niveles, son 4 las personas que estarían llevándose algún beneficio: B, C<sub>1</sub> (pues se lleva al beneficio de D<sub>23</sub>), C<sub>2</sub> (pues se lleva al beneficio de D<sub>33</sub>) y C<sub>3</sub> (pues se lleva al beneficio de D<sub>43</sub>). Si hubieran 4 niveles y se sigue este razonamiento, se agregarían 4 personas más al total de personas que obtendrían una ganancia; por lo que los números se sintetizan de la siguiente manera:

Para 1 nivel ---- > nadie gana dinero.

Para 2 niveles ---- > 1 persona gana dinero

Para 3 niveles ---- > 4 personas ganan dinero (las 3 del segundo nivel y la única del primer nivel)

Para 4 niveles ---- > 13 personas ganan dinero (las 4 anteriores y las 9 del tercer nivel)

Para 5 niveles ---- > 40 personas ganan dinero (las 13 anteriores y las 27 del cuarto nivel)

.....

Para k niveles, la cantidad de personas que ganaría dinero está dada por:

$$\sum_{i=1}^{k-1} 3^{i-1} = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{k-1} = \frac{3^{k-1} - 1}{2}$$

y entonces habría  $3^{k-1}$  personas que no estarían cobrando nada, por lo que la proporción  $p$  de participantes que pierden su dinero respecto del total de participantes está dado por  $p = \frac{3^{k-1}}{\frac{3^k - 1}{2}}$

Desarrollando esta expresión:

$$p = \frac{3^{k-1}}{\frac{3^k - 1}{2}} = \frac{3^k \cdot \frac{1}{3}}{\frac{3^k \left(1 - \frac{1}{3^k}\right)}{2}} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3^k}}$$

Es decir,

$$p = 1 \quad \text{si } k = 1$$

$$p = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3^k}} \quad \text{si } k \geq 2$$

Resulta también evidente que la proporción  $p$  disminuye a medida que aumenta la cantidad de participantes pero siempre se encuentra por encima de  $\frac{2}{3}$ , por lo que más del 66,6 % de sus participantes estaría perdiendo dinero con este "atractivo" esquema.

## Conclusiones

Los ejemplos presentados aquí permiten, a través de cálculos propios de la enseñanza básica de matemática a un alumno de cualquier carrera de grado de una Facultad de Ciencias Económicas encontrar evidencia y datos que permitan fundamentar las relaciones, proporciones y conceptos detrás de un esquema piramidal. No se pretende con

este trabajo elaborar un tratado que contenga la matemática detrás de todos los tipos de estructuras piramidales sino, en la medida de lo posible y de las limitaciones de espacio, presentar algunos casos que sirvan como disparadores para usar, en el contexto de una clase de matemática, como posibles ejemplos. Los años que llevo viniendo a Jornadas escucho en forma recurrente planteos respecto de acercarle al alumno temáticas de actualidad que lo vinculen y lo amiguen con la matemática y, en ese sentido, creo que ésta podría ser una de tantas propuestas. Ojalá así sea.

### Referencias bibliográficas

Coenen, Tracy (2009). *Expert Fraud Investigation: A Step-by-Step Guide*. Editorial John Wiley & Sons.

Kitching, Trevor (2001). *Purchasing scams and how to avoid them*. Gower Publishing Company.

Lopez, Fernando y López, Felipe (2016). [«Las lecciones de las estafas piramidales en Chile y el mundo»](#). *Observatorio Economico N° 104*. Facultad de Economía y Negocios. Universidad Alberto Hurtado.

Taylor, Jon (2011). *The Case (for and) against Multi-level Marketing*. Consumer Awareness Institute.