# *162 GESTIÓN ÓPTIMA DE UN RECURSO MINERO UTILIZANDO PROGRAMACIÓN DINÁMICA*

García Fronti Verónica y García Roberto
Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Económica, Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos aplicados a la economía y la gestión (CMA – IADCOM)
vgarciafronti@hotmail.com , robertogarcia@economicas.uba.ar

**Especialidad:** Matemática aplicada
**Palabras clave:** Programación dinámica determinística, tiempo discreto

**Resumen**

El objetivo de este trabajo es introducir a los alumnos de las carreras de Contador y Actuario de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires en el uso de la herramienta matemática denominada programación dinámica que forma parte del programa de la asignatura Métodos Cuantitativos.
La programación dinámica es una metodología aplicable en la toma de decisiones frente a problemáticas que pueden descomponerse en subproblemas secuenciales de menor tamaño. Se basa en el principio de optimalidad, el que establece que dado un estado actual del problema la política de decisión óptima para las siguientes etapas es independiente de la decisión tomada en las etapas anteriores, es decir depende sólo del estado actual del problema y no de cómo se llegó a esa situación actual. Para llevar a cabo el procedimiento se dispone de una relación recursiva que permite identificar la política óptima en una etapa dada la política óptima en la etapa siguiente o anterior (dependiendo de si la recursividad se realiza hacia adelante o hacia atrás).
En este trabajo el tema se aborda a partir de un caso concreto referido a la explotación de un recurso minero conocido el stock inicial y con un horizonte temporal determinado y finito. El mismo se estructura en tres partes, primero se formulan las características generales de la programación dinámica, luego se aborda el problema de gestión óptima de un único recurso minero para un período determinado y con un stock inicial fijo, y por último se exponen las conclusiones abordadas.

## INTRODUCCION

La programación dinámica es una técnica cuantitativa adecuada para definir la política de extracción óptima de un único recurso minero para un período determinado y con un stock inicial fijo. El problema consiste en determinar cuánto extraer en cada uno de los períodos considerados con el objetivo de maximizar el beneficio obtenido para el lapso de tiempo considerado.
De esta forma, en este trabajo se explica a través de un ejemplo práctico como es la política óptima de extracción de un recurso minero, el procedimiento utilizado es la programación dinámica determinística en tiempo discreto.
En la primera parte del trabajo se describen las características comunes de los problemas que pueden ser resueltos mediante esta técnica cuantitiva de programación dinámica y luego, en la segunda parte, se presenta el desarrollo de la misma a través la resolución de un caso de gestión óptima de un recurso minero.

## FUNDAMENTACIÓN

La programación dinámica es un procedimiento matemático que ayuda a la toma de decisiones secuenciales interrelacionadas. Se comienza descomponiendo el problema original en subproblemas de menor tamaño en los que es más fácil realizar los cálculos. Estos cálculos se realizan en forma recursiva donde la solución óptima de un subproblema se utiliza como dato de entrada para el siguiente problema, de forma que la solución óptima para todo el problema se obtiene cuando se soluciona el último subproblema.

La forma en que se realizan los cálculos recursivos dependerá de cómo se descomponga el problema original y por otro lado los cálculos podrán realizarse hacia adelante o hacia atrás. En la recursividad hacia adelante (también denominado en avance) los cálculos van desde la etapa inicial a la final mientras que en la recursividad hacia atrás (o en retroceso) se comienza por la etapa final y se termina el proceso en la etapa inicial. Ambos cálculos de recursividad llegan a la misma solución óptima pero la más usada es la recursividad en retroceso porque es más eficiente desde el punto de vista computacional.

El procedimiento utilizado se basa en el principio de optimalidad en donde las decisiones futuras para las etapas posteriores constituyen una política óptima que es independiente de la política adoptada en todas las etapas precedentes, de esta forma es posible descomponer el problema original en subproblemas que son mucho más manejables.

Los elementos característicos básicos de la programación dinámica son:

1. Cada problema original es posible descomponerlo en subproblemas o etapas. Cada una de estas etapas requiere una política de decisión.
2. En cada etapa es posible determinar estados asociados al inicio (estos pueden ser finitos o infinitos), la política de decisión de cada etapa modifica el estado inicial de la etapa actual en un estado asociado con el inicio de la siguiente etapa.
3. Al efectuar el procedimiento de programación dinámica es posible definir la decisión óptima para cada etapa en cada uno de los estados iniciales posibles.
4. La programación dinámica es determinística si el estado de la siguiente etapa está completamente determinado por el estado y la decisión tomada en la etapa actual, mientras que se dice que es probabilística cuando existe una distribución de probabilidades para el valor de los posibles estados de la siguiente etapa.
5. Se considera que, definido un estado actual del sistema, la política de decisión óptima para las siguientes etapas es independiente de la decisión tomada en las etapas anteriores, es decir sólo depende del estado actual y no de la forma en que se llegó a ese estado. Esto se conoce como principio de optimalidad de programación dinámica.
6. Se dispone de una relación recursiva que identifica la política óptima de la etapa n dada la política optima de la etapa n+1, en el caso de realizar recursividad en retroceso. De la misma forma, si se realiza una recursividad en avance se conocerá la política óptima de la etapa n conocida la política óptima de la etapa n-1.

Es posible clasificar los problemas de programación dinámica según la forma que tenga su función objetivo, esta puede ser de maximizar o minimizar las contribuciones de cada subproblema. Por otro lado, la naturaleza de los estados o variables de decisión pueden ser continuas o discretas. Estas diferencias no afectan la estructura básica que se plantea para los problemas abordados con programación dinámica.

A continuación, se analizará un ejemplo de gestión óptima de un recurso minero con el enfoque de programación dinámica determinística en donde se va a maximizar la función objetivo y las variables de estado y decisión son discretas.

**DESARROLLO**

Se debe definir la tasa óptima de extracción de un mineral determinado, conocido el stock del mismo en el momento inicial y frente a un plazo de tiempo de extracción del recurso definido. Para tomar la decisión se aplicará el procedimiento de programación dinámica en tiempo discreto de forma de determinar la tasa de extracción óptima para el período de análisis completo, pero abordando el problema por etapas e incorporando secuencialmente más etapas.

**Ejemplo del recurso minero**[3]

El problema que se analizará se extrajo del libro Optimización dinámica de Cerdá Tena, en el mismo se debe determinar, para un lapso de explotación de 4 años, el plan óptimo de extracción de un mineral que posee un stock inicial de 80 unidades. Pasado el lapso de 4 años de explotación el valor del mineral que queda en la mina es nulo.

La cantidad a extraer en cada uno de los cuatro períodos es de 0, 10 o 20 unidades, debiendo ser menor a la cantidad de mineral que quede en la mina en el momento de extracción.

El beneficio que se obtiene depende del stock del mineral disponible (s) y de la cantidad que se extraiga en dicho período (x) en la Tabla 1 se pueden observar los beneficios en cada caso.

**Tabla 1**: Beneficios según el stock y cantidad a extraer

| | Stock disponible (s) | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Unidades a extraer en cada etapa (x) | 0 | -5 | -5 | -5 | -5 | -10 | -10 | -10 | -15 | -15 |
| | 10 | | -35 | -25 | -20 | 0 | 5 | 15 | 20 | 25 |
| | 20 | | | -35 | -25 | -15 | -10 | 10 | 30 | 40 |

Las variables que se encuentran en el modelo son:

$B(s_n,\ x_n)$= beneficio que se obtiene en el período n en el que el stock al inicio del período es $s_n$ y la extracción es $x_n$

$s_n$ = stock del recurso minero al inicio de cada período $n$ donde $n$=*1,2,3,4*

$x_n$ = cantidad de mineral a extraer en cada período $n$ donde $n$=*1,2,3,4*

El planteo matemático del problema es:

$$\max_{\{x(n)\}_{n=1}^{4}} V = \sum_{n=1}^{4} B(x(n), s(n))$$

Sujeto a: $s_{n+1} = s_n - x_n$

Con: $s_1 = 80$

$$x_n \in \{0,10,20\},\ para\ n = 1,2,3,4$$

$$x_n \leq s_n \quad , \qquad para\ n=1,2,3,4$$

Sea $V_n(s_n,\ x_n)$ el beneficio total de la política óptima de extracción para enfrentar las etapas restantes, cuando el stock disponible al inicio de esa etapa es $s_n$ y el decisor elige extraer $x_n$ del recurso minero. Dados $s_n$ y $n$, sea $x_n^*$ el valor de $x_n$ que maximiza la función $V_n(s_n,\ x_n)$ y sea $V_n^*(s_n, x_n)$ el valor máximo correspondiente de $V_n(s_n,\ x_n)$:

$$V_n(s_n,\ x_n) = B(s_n,\ x_n) + V_{n+1}^*(x_n)$$

$$V_n^*(s_n, x_n) = \max_{x_n} V_n(s_n, x_n) = V_n(s_n, x_n^*)$$

[3] Este ejemplo se ha extraído del libro Optimización dinámica (2012)

De acuerdo a la política de extracción del recurso minero que permite extraer en cada etapa 0, 10 o 20 unidades, es posible armar una tabla (Tabla 2) con los posibles valores que puede tomar el stock (s) del recurso minero en cada etapa. La construcción de esta tabla se realiza partiendo de la etapa 1 en donde el stock es conocido y es de 80 unidades ($s_1 = 80$), en la etapa 2 el stock inicial va a depender de la etapa anterior : $s_2 = s_1 - x_1$ por lo tanto, $s_2$ puede ser de 80 (si no se extrajo nada en la etapa 1), 70 (si se extrajeron 10 unidades en la etapa 1) y 60 (si se extrajeron 20 unidades del mineral en la etapa 1). Para las siguientes se definen los stocks disponibles de la misma forma como se muestra en la Tabla 2.

**Tabla 2**: Stocks disponibles al comienzo de cada etapa

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Stock disponible al inicio de la etapa 1 ($s_1$) | 80 | | | | | | | | |
| Stock disponible al inicio de la etapa 2 ($s_2$) | 80 | 70 | 60 | | | | | | |
| Stock disponible al inicio de la etapa 3 ($s_3$) | 80 | 70 | 60 | 50 | 40 | | | | |
| Stock disponible al inicio de la etapa 4 ($s_4$) | 80 | 70 | 60 | 50 | 40 | 30 | 20 | | |
| Stock disponible al inicio de la etapa 5 ($s_5$) | 80 | 70 | 60 | 50 | 40 | 30 | 20 | 10 | 0 |

Como se ha explicado la programación dinámica comienza analizando una etapa del problema inicial en la que se busca la solución óptima y después se va agrandando en forma gradual hasta resolver el problema original completo. A continuación, se explicará este procedimiento para este problema de extracción del recurso minero.

El inicio del procedimiento se realiza con la última etapa, en el caso del ejemplo la etapa 4 ya que se analizará la gestión óptima para un alcance de 4 períodos.

**ETAPA 4** (etapa final)

Al final de la etapa 4, el stock disponible no es conocido y se denomina: $s_5$. De acuerdo al problema planteado, los beneficios serán nulos de ahí en más, por lo que el valor de la función de beneficio en la etapa 5 será nula ($V_5^* = 0$).

De acuerdo a la tabla de los stocks al inicio de cada etapa (Tabla 2), los posibles stocks disponibles al inicio de la etapa 4 son:

$$s_4 \in \{20,30,40,50,60,70,\ 80\}$$

Suponiendo conocido el stock al inicio de la etapa 4:

$$V_4(s_4, x_4) = B(s_4, x_4) + V_5^*$$

$$V_4^*(s_4) = \max_{x_4 \epsilon \{0,10,20\}} V_4(s_4, x_4)$$

En base esto se construye la tabla 3, por ejemplo si el stock al inicio de la etapa 4 es de 70 unidades, se podrá extraer 0, 10 o 20 unidades para cada una de esta decisiones el beneficio global obtenido ($V_4(70, x_4)$):

$V_4(70,0)$: $B(70,0)$+0 =-15

$V_4(70,10)$: $B(70,10)$+0 =20

$V_4(70,20)$: $B(70,0)$+0 =30

Si se repite el procedimiento para cada estado se obtiene la Tabla 3, en donde se han explicitado, para facilitar la comprensión los cálculos realizados cuando el stock inicial es de 80 unidades.

**Tabla 3**: Beneficio global en función del stock inicial $(s_4)$ las diferentes políticas de extracción (x) en la Etapa 4

| $s_4$ | $x_4$ | $V_4(s_4)$ |
|---|---|---|
| 80 | 0 | $B(80{,}0)$+ $V_5^*$= -15 + 0=**15** |
| | 10 | $B(80{,}10)$+ $V_5^*$=25+0=**25** |
| | 20 | $B(80{,}20)$+ $V_5^* = 40 + 0 =$**40** |
| 70 | 0 | -15 |
| | 10 | 20 |
| | 20 | 30 |
| 60 | 0 | -10 |
| | 10 | 15 |
| | 20 | 10 |
| 50 | 0 | -10 |
| | 10 | 5 |
| | 20 | -10 |
| 40 | 0 | -10 |
| | 10 | -10 |
| | 20 | 0 |
| 30 | 0 | -15 |
| | 10 | -5 |
| | 20 | -20 |
| 20 | 0 | -5 |
| | 10 | -25 |
| | 20 | -35 |

De la Tabla 3 se desprende la decisión óptima en la etapa 4 para cada estado y el beneficio global máximo correspondiente. Esto se presenta en el Tabla 4.

**Tabla 4**: Decisión óptima en la etapa 4 según el stock inicial en la etapa 4

| $s_4$ | $V_4^*(s_4)$ | $x_4^*$ |
|---|---|---|
| 80 | 40 | 20 |
| 70 | 30 | 20 |
| 60 | 15 | 10 |
| 50 | 5 | 10 |
| 40 | 0 | 20 |
| 30 | -5 | 10 |
| 20 | -5 | 0 |

La tabla 4 permite definir al decisor cuanto extraer del recurso de acuerdo al stock disponible en la mina, por ejemplo, si al comienzo de la etapa 4 se contaba con 50 unidades de stock del recurso la decisión óptima es extraer 10 unidades y el beneficio óptimo será de 5.

Una vez que se definió la política óptima dado cada stock inicial en la etapa 4 se procede a ampliar el problema secuencialmente, por lo que se incorpora la etapa 3.

**ETAPA 3** (n=3)

De acuerdo a la Tabla 2 los posibles stocks al comienzo de la etapa 3 son:

$$s_3 \in \{80,70,60,50,40\}$$

Siendo conocido $s_3$ :

$$V_3(s_3,x_3) = B(s_3,x_3)+V_4^*(s_4 = s_3 - x_3)$$

$$V_3^*(s_3) = \max_{x_3 \epsilon \{0,10,20\}} V_3(s_3,x_3)$$

Con estas ecuaciones se procede a armar la tabla de beneficios obtenidos según el stock disponible al comienzo de la etapa 3 (Tabla 5), nuevamente para una mejor comprensión en la tabla se han incorporado los cálculos realizados cuando el stock inicial en la etapa 3 es de 80 unidades.

**Tabla 5**: Beneficio global en función del stock inicial ($s_3$) y las diferentes políticas de extracción (x) en la Etapa 3

| $s_3$ | $x_3$ | $V_3(s_3)$ = $B(s_3,x_3)$ + $V_4^*(s_4)$ |
|---|---|---|
| 80 | 0 | $B(80,0)$+$V_4^*(80)$= -15+40 = 25 |
| | 10 | $B(80,10)$+$V_4^*(70)$ $=$ 25 +30 = 55 |
| | 20 | $B(80,20)$+$V_4^*(60)$ $=$ 40+15 = 55 |
| 70 | 0 | 15 |
| | 10 | 35 |
| | 20 | 35 |
| 60 | 0 | 5 |
| | 10 | 20 |

| | | |
|---|---|---|
| | 20 | 10 |
| 50 | 0 | -5 |
| | 10 | 5 |
| | 20 | -15 |
| 40 | 0 | -10 |
| | 10 | -5 |
| | 20 | -20 |

Al igual que se hizo en la etapa anterior, se selecciona la cantidad de recurso minero a extraer que maximice la función beneficio global de acuerdo a cuál es el stock disponible al comienzo de cada etapa, esto se puede visualizar en la Tabla 6

**Tabla 6**: Decisión óptima según el stock inicial en la Etapa 3

| $s_3$ | $V_3^*(s_3)$ | $x_3^*$ |
|---|---|---|
| 80 | 55 | 10 o 20 |
| 70 | 35 | 10 o 20 |
| 60 | 20 | 10 |
| 50 | 5 | 10 |
| 40 | -5 | 10 |

**ETAPA 2 (n=2)**

$$s_2 \in \{80,70,60\}$$

Siendo conocido $s_2$ :

$$V_2(s_2,x_2) = B(s_2,x_2)+V_3^*(s_3 = s_2 - x_2)$$
$$V_2^*(s_2) = \max_{x_2 \epsilon \{0,10,20\}} V_2(s_2,x_2)$$

**Tabla 7**: Beneficio global en función del stock inicial ($s_2$) y las diferentes políticas de extracción (x) en la Etapa 2

| $s_2$ | $x_2$ | $V_2(s_2) = B(s_2, x_2) + V_3^*(s_3)$ |
|---|---|---|
| 80 | 0 | 40 |
| | 10 | 60 |
| | 20 | 60 |
| 70 | 0 | 20 |
| | 10 | 40 |
| | 20 | 35 |
| 60 | 0 | 10 |
| | 10 | 20 |
| | 20 | 5 |

**Tabla 8**: Decisión óptima según el stock inicial en la Etapa 2

| $s_2$ | $V_2^*(s_2)$ | $x_2^*$ |
|---|---|---|
| 80 | 60 | 10 o 20 |
| 70 | 40 | 10 |
| 60 | 20 | 10 |

**ETAPA 1** (n=1)

En la etapa inicial el stock disponible ya es conocido, por lo tanto el decisor debe definir la mejor política de extracción si $s_1 = 80$, por lo tanto:

$$V_1(80, x_1) = B(80, x_1) + V_2^*(s_2 = 80 - x_1)$$

$$V_1^*(s_1) = \max_{x_1 \epsilon \{0,10,20\}} V_1(80, x_1)$$

**Tabla 9**: Beneficio global en función del stock inicial ($s_2$) y las diferentes políticas de extracción (x) en la Etapa 1

| $s_1$ | $x_1$ | $V_1(s_1, x_1) = B(80, x_1) + V_2^*(s_2)$ |
|---|---|---|
| 80 | 0 | -15+ 60 = 45 |
| | 10 | 25 + 40 = 65 |
| | 20 | 40 + 20 = 60 |

**Tabla 10**: Decisión óptima según el stock inicial en la Etapa 1

| $s_1$ | $V_1^*(s_1)$ | $x_1^*$ |
|---|---|---|
| 80 | 65 | 10 |

De esta forma finalizó el procedimiento de programación dinámica hacia atrás, y es posible establecer la política de extracción óptima para las cuatro etapas revisando las tablas óptimas (Tablas: 10,8, 6 y 4). Así, en la Etapa 1 la tasa de extracción óptima es de 10 unidades $(x_1^* = 10)$ resultando un estado inicial para la Etapa 2 de 70 ($s_2$=70), por lo que la decisión óptima para la segunda etapa será de 10 $(x_2^* = 10)$. El estado inicial en la etapa 3 es de 60 ($s_3$= 60) y la decisión óptima es de 10 ($x_3^*$ =10), por último la etapa 4 se inicia con un estado de 50 ($s_4$=50) correspondiendo una decisión óptima es en este ejemplo de 10 $(x_4^* = 10)$.
Como resultado final la mejor política de gestión del mineral consiste en extraer 10 unidades en cada uno de los períodos quedando al final del horizonte temporal 40 unidades y arrojando un beneficio máximo de 65.

**CONCLUSIÓN**

En este trabajo se han explicado las características básicas de la programación dinámica determinística a través de un ejemplo de gestión óptima de un recurso minero en un lapso de tiempo determinado. El objetivo del problema planteado es enseñar a utilizar esta herramienta que es muy útil para la toma de decisiones que se encuentran interrelacionadas.
En el caso analizado la función objetivo era de maximización y las variables de estado (stock del recurso minero) y de decisión (cantidad a extraer en cada período) eran discretas, pero como se ha explicado en el trabajo este método es fácilmente aplicable a problemas de minimización y con variable continuas.
Asimismo, es importante observar que, si bien se ha identificado la gestión óptima de extracción para el problema dado, esta metodología permite conocer cómo proceder si es que el decisor se ha desviado de la trayectoria óptima. En los problemas de la realidad lo más probable es que no se pueda seguir en todas las etapas la decisión óptima, pero ante algún cambio en el trayecto las tablas confeccionadas mediante programación dinámica permiten redefinir la nueva ruta óptima.

**REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

HILLIER F.S., LIEBERMAN G. J. (2010). *Introducción a la Investigación de Operaciones.* México. Mc Graw Hill.

TAHA HAMDY A. (2012) *Investigación de Operaciones* México. Pearson.

CERDÁ TENA, E. (2012) *Optimización dinámica*. México. Alfaomega

DE LA FUENTE, A. (2000). *Mathematical methods and models for economists*. UK. Cambridge University Press.