204 UNA APLICACIÓN ECONÓMICA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN: EL MODELO DE PHILLIPS

Schneeberger, Marino – Weidmann, Gabriel
Facultad de Ciencias Económicas – Universidad Nacional de Entre Ríos
marinos@fceco.uner.edu.ar –goweidmann@fceco.uner.edu.ar

Especialidad: Matemática Aplicada

Palabras Clave: Ecuaciones diferenciales, Aplicaciones, Economía, Modelos

Resumen

El presente trabajo aborda una propuesta concreta respecto de la aplicación de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con coeficientes constantes, tema desarrollado en un curso avanzado de Matemática para Economistas de la Licenciatura en Economía.
Muchos de los contenidos que forman parte del programa de esta asignatura resultan, de alguna manera, bastante complejos para los estudiantes. Es por este motivo que se trata en todos los casos de mostrar las aplicaciones económicas de los mismos, con la finalidad de que los alumnos puedan percibir la real importancia que tienen en su formación profesional.
Particularmente, las ecuaciones diferenciales, y fundamentalmente las de orden superior, presentan ciertos niveles de dificultad a la hora de tratarlas dado que en primera instancia no parecen contribuir de manera muy clara y determinante en el planteo de cuestiones económicas que resulten concretas e interesantes al mismo tiempo.
Se trata de hacer notar la relevancia que las mismas poseen a la hora de plantear modelos económicos que permitan analizar en forma rigurosa fenómenos vinculados al campo económico, sobre todo si las variables que en los mismos intervienen vinculan fenómenos de la realidad, que pueden visualizarse de manera clara y precisa.
Partimos de la concepción que propone la enseñanza de la matemática basada en el planteo y solución de situaciones y problemas del campo económico, como una forma de motivar e incentivar el interés por estos temas. Si bien es necesario desarrollar algunas conceptualizaciones teóricas previas como punto de partida para el abordaje de situaciones particulares, la aplicación de estos contenidos en forma inmediata en problemas propios del campo de las ciencias económicas resulta de fundamental importancia.
Para este tema en particular, el modelo de Phillips y el análisis de la curva asociada que permite vincular y establecer relaciones entre variables importantes resulta muy relevante.

Introducción

La asignatura Matemática para Economistas, que se dicta en el tercer año de la Licenciatura en Economía, aborda una variedad de contenidos muy interesante por sus aplicaciones al campo económico, tales como los espacios vectoriales, las transformaciones lineales, las formas cuadráticas, la optimización, entre otros. Un tema de relevante importancia lo constituyen las ecuaciones diferenciales, al igual que las ecuaciones en diferencias.

Particularmente, las ecuaciones diferenciales de orden superior originan en su tratamiento ciertas dificultadas, muchas veces vinculadas a la necesidad de visualizar cuál es su aplicación concreta para plantear, resolver y analizar problemas de naturaleza económica, que permitan a su vez realizar predicciones en base a los resultados obtenidos.

Es por este motivo que, al igual que en todos los temas que se tratan, se pretende desarrollar inicialmente un contenido teórico básico que incluya las conceptualizaciones fundamentales para poder luego, al mismo tiempo que se profundiza en su abordaje, plantear y analizar sus aplicaciones en el campo específico.

Si bien la introducción de las ecuaciones diferenciales para plantear modelos continuos resulta bastante sencilla, el tratamiento de las de orden superior no lo es tanto, dado que se complejiza el procedimiento para encontrar las soluciones adecuadas.

Para el caso específico de las ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes, resulta muy interesante poder encontrar y mostrar la mayor cantidad de problemas concretos en los que las mismas intervienen, como un elemento motivador del aprendizaje. En este trabajo en particular, se desarrolla una importante aplicación de las mismas, tal como lo es la denominada curva de Phillips.

Fundamentación

Las ecuaciones diferenciales son ecuaciones en las que la incógnita resulta ser una *función* (muchas veces en términos aplicados una función respecto del tiempo), donde intervienen una o más derivadas de la misma. Es decir, es una relación no trivial entre una función desconocida y una o más de sus derivadas. Cada ecuación diferencial presenta un *orden* y un *grado*. El orden está dado por la derivada superior presente en la ecuación, y el grado es la potencia correspondiente a dicha derivada.

Para el caso de una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, la ecuación relaciona una función con sus derivadas, siendo la segunda derivada la mayor, por lo que, en forma explícita, puede expresarse en la forma $y'' = f(x, y, y')$. Si el exponente de la derivada segunda es 1, se corresponde con el caso de una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Asimismo, si los coeficientes correspondientes a las distintas derivadas involucradas son constantes, se trata de una *ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, la cuál puede expresarse como sigue*: $a_2y'' + a_1y' + a_0y = b \quad con \ \ a_2 \neq 0$

En este planteo hay dos posibilidades. Si el término *b* es igual a 0, estamos en el caso de una ecuación *homogénea*, mientras que, si dicho término es distinto de cero, la ecuación es *no homogénea*. Esta diferenciación es fundamental para plantear las soluciones correspondientes.

Para el caso de una ecuación diferencia homogénea, si y_1 e y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial planteada, entonces también será solución de dicha ecuación toda expresión que pueda escribirse como $y=C_1y_1+C_2y_2$. Resulta necesario, en consecuencia, proponer una función posible que cumpla con las condiciones que requiere la ecuación.

La resolución del caso homogéneo nos permite una primera solución. Considerando el caso homogéneo $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$, esta situación requiere tener dos soluciones posibles no proporcionales. Al ser coeficientes constantes, se pueden ensayar soluciones con la propiedad de qué *y, y'* e *y''* sean múltiplos entre ellos. Esta situación se cumple para las soluciones de tipo $y = e^{rx}$, ya que $y' = r\, e^{rx} = ry \ \ ; y'' = r^2\, e^{rx} = r^2y$. Esta solución, según nuestro esquema general de una ecuación homogénea, requiere que: $a_2r^2\, e^{rx} + a_1r\, e^{rx} + a_0\, e^{rx} = 0$, lo que, factorizando, implica que se verifique la siguiente igualdad $a_2r^2 + a_1\, r + a_0 = 0$

Esta última expresión se conoce como *ecuación característica* de la ecuación diferencial. Es una ecuación de segundo grado cuyas raíces (r_1 y r_2) pueden asumir tres posibles situaciones, las cuales influirán en la forma de la solución de la ecuación diferencial. Esto es, r_1 y r_2 pueden ser reales y distintas (caso 1), reales e iguales (caso 2), o complejas (caso 3). Las soluciones propuestas, por lo tanto, serán para cada caso:

$Caso\ 1\!:\ y_h = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$

$Caso\ 2\!:\ y_h = C_1e^{rx} + C_2e^{rx}x$

$Caso\ 3\ con\ r_1 = \alpha + \beta i\ y\ \ r_2 = \alpha - \beta i:\ \ y_h = C_1\, e^{\alpha x}\ cos\,\beta x + C_2\, e^{\alpha x}\ sen\,\beta x$

Si planteamos el caso de las ecuaciones diferenciales de segundo orden *no homogéneas*, su solución será la combinación entre la solución del correspondiente caso homogéneo asociado, con una solución particular propuesta para su caso no homogéneo, la cual dependerá del término *b*. Entonces, la solución quedará planteada como $y=y_h+ y_p$.

La solución homogénea se construye de la misma forma planteada anteriormente. Queda por analizar la propuesta de la solución particular que dependerá de las características que posea la función del segundo miembro de la ecuación.

La tabla siguiente ejemplifica algunos posibles tipos de solución particular a ensayar en cada caso

$F(x)$	y_p	Si estos valores no son raíces de la ecuación característica
Polinomio de grado n	$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$	0
$e^{\alpha x}$	$Ae^{\alpha x}$	α
$k\cos\beta x$ $k\,sen\beta x$	$A\cos\beta x + B\,sen\beta x$	$\alpha + \beta i$

Si se hacen presentes los valores de la tercera columna, la solución propuesta se debe multiplicar por *x* elevada al orden de multiplicidad de la raíz. Asimismo, si el término *b* se presenta como una combinación de casos (suma o multiplicación), la solución propuesta también debe proponerse de la misma forma, según las características de las funciones.

Deberán encontrarse los coeficientes correspondientes según las relaciones planteadas entre las derivadas en la ecuación diferencial. Allí se podrá plantear un sistema de ecuaciones para identificar el valor de los coeficientes. Si se hacen presentes los valores de la 3er columna, la solución propuesta se debe multiplicar por *x* (elevada al orden de multiplicidad de la raíz). Asimismo, si el término *b* se presenta como una combinación de casos (sumas o multiplicación), la solución propuesta también debería serlo.

A modo de ejemplo podemos proponer la ecuación diferencial $y'' - y' - 2y = 4x$. En este caso, la ecuación homogénea asociada plantea una ecuación característica tal que $r^2 - r - 2 = 0$, donde sus raíces son $r_1=2$; $r_2=-1$. Por lo tanto, la solución del caso homogéneo quedaría planteada como:

$$y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{-1x}$$

Para encontrar la solución del caso no homogéneo, debemos analizar el término *4x*. El mismo es un polinomio de grado 1, por lo tanto, la solución particular propuesta sería $y_p=Ax+B$, donde $y'=A$ e $y''=0$. Reemplazando estos valores en la ecuación diferencial propuesta se plantea: *0-Ax-2(AX+B)=4x* →*-AX-2AX-B=4x*. Resolviendo este planteo, se identifica que *A*=*-2* y *B*=*1*, por lo tanto, la solución particular queda planteada como $y_p=-2x+1$. Combinando ambas situaciones, la solución queda planteada como:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-1x} - 2x + 1$$

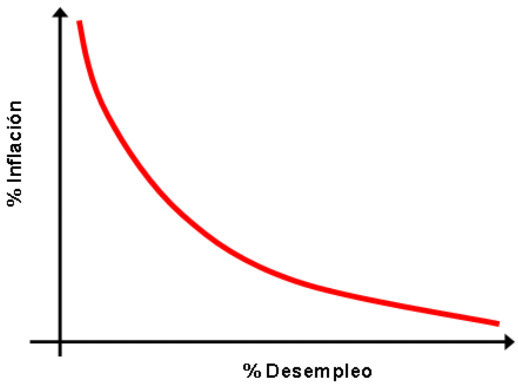
La estabilidad dinámica de la solución se determinará si la ecuación homogénea asociada tiende a 0 a medida que x tiende a infinito. Por lo tanto, su trayectoria quedará determinada por el signo de las raíces de la ecuación características. Para los *casos 1 y 2* donde las raíces son reales, es necesario que dichas raíces sean negativas ambas para cumplir con la condición planteada, mientras en el *caso 3* es necesario que α sea negativo. Por lo tanto, la solución será estable si y solo si ambas raíces de la ecuación característica tienen partes reales negativas (Sydsaeter&Hammod; 1996). Conocer la estabilidad de una ecuación diferencial es fundamental para las aplicaciones económicas, ya que permite entender si el planteo teórico supone una trayectoria estable, es decir que tiende al equilibrio, o si el planteo realizado presenta una inestabilidad o trayectorias divergentes.

Desarrollo

Nos dedicaremos ahora a plantear, de forma concreta, una importante aplicación de las ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes, tal como es la denominada curva de Phillips.

Por más que la denominada curva de Phillips se asocia a la relación entre el desempleo y la inflación, A. W. Phillips en su artículo "La relación entre el desempleo y la tasa de variación de los salarios monetarios en el Reino Unido, 1861-1957" estudió la relación existente entre los niveles de desempleo que presenta una economía con la variación del salario nominal de los mismos.

Ilustración 1: Curva de Phillips



La relación entre inflación y desempleo había sido estudiada previamente por Irving Fisher, y posteriormente a la publicación de Phillips, serían Friedman y Phelps los que ampliarían la relación del desempleo hacia la inflación, más allá de los niveles de salario nominal. Si bien en los años previos a la década de los 70 la formulación original de Phillips se adecuaba a los datos observados, la adecuación de Friedman-Phelps le permitió adaptar la misma a los fenómenos observados en la economía internacional a partir de dicha década, donde las tasas de inflación tendieron a aumentar en forma considerable.

Los esquemas de Phillips, Friedman y Phelps por lo general son introducidos y estudiados en las carreras de grado a través de distintos manuales de Macroeconomía. Para tal fin, aquí partimos de la formulación que realizan Sachs y Larrain (1994), el cual suele ser un primer acercamiento analítico a su formulación. De esta forma, el desarrollo de aplicaciones de ecuaciones diferenciales de orden superior para la resolución de modelos económicos permite a los estudiantes profundizar el análisis y comprensión de dicho modelo, así como el trabajo en concreto con el modelo específico. En dicha formulación, se parte de la idea de que las condiciones del mercado laboral influyen en los salarios. Es decir, cuando el desempleo es bajo se generan presiones al alza de los salarios por varios motivos, por ejemplo mayor poder de negociación. Por otra parte, cuando el desempleo es mayor, es más difícil conseguir un trabajo, lo que erosiona las condiciones de negociación y contratación por parte de los trabajadores, pudiendo incluso aceptarse trabajos con reducciones de los salarios reales.

En términos formales, la tasa de cambio del salario real es una función que depende en forma inversa de los niveles de desempleo, así como en forma positiva de las expectativas inflacionarias:

$$\hat{w} = f(U) + \alpha\pi$$

siendo $\hat{w}$ la variación del salario real, U representando la tasa de desempleo, π la expectativa de inflación, y α un coeficiente de traslado desde las expectativas inflacionarias hacia la variación del salario real.

Asimismo, este cambio salarial implicará impactos en los precios. Si se supone un traslado desde el salario hacia los precios que solo se vea amortiguado por los cambios en la productividad (T), se llega a la relación de la curva de Phillips con expectativas inflacionarias de la siguiente forma:

$\hat{p} = \hat{w} - T \; \rightarrow \quad \hat{p} = f(U) + \alpha\pi - T$, donde p indica la variación de precios.

Asimismo, el modelo deposita en las expectativas inflacionarias un mecanismo sumamente importante en la trayectoria inflacionaria. Los mecanismos específicos entre el vínculo entre desempleo e inflación ahora quedan mediados por las formas en que los agentes económicos construyen dichas expectativas. En este sentido, la teoría económica ha desarrollado dos grandes grupos de propuestas: las expectativas adaptativas y las expectativas racionales. Bajo el primer caso, los agentes forman sus expectativas en función de la inflación pasada. En cambio, las expectativas racionales suponen que los agentes económicos estiman la inflación esperada analizando las políticas económicas y mirando hacia adelante, entendiendo como se comporta la economía.

En este caso, se trabaja con las expectativas adaptativas, las cuales permiten incorporar al planteo del modelo una ecuación fundamental para su resolución. De esta forma, se puede esperar que las expectativas evolucionen de la siguiente manera:

$$\pi' = h(p - \pi)$$

dónde π' es la derivada primera de la función de expectativas respecto del tiempo, (p-π) es la diferencia entre el nivel de inflación del período presente respecto a la inflación esperada para dicho período, y h representa el factor de corrección de las expectativas inflacionarias respecto al error de estimación presente. Si $p>\pi$ las expectativas se corregirán al alza, y si $p<\pi$ a la baja.

Hasta aquí tenemos planteadas dos ecuaciones con tres incógnitas de nuestro interés. Es posible, para resolver el mismo, suponer el comportamiento exógeno de una de estas variables, o incorporar una ecuación más. Una ecuación posible de relacionar con este problema es aquella que relaciona el nivel de desempleo respecto del nivel de precios, la cual puede ser esquematizada de la siguiente forma:

$$U' = -\gamma(m - p)$$

dónde U' es la derivada de la función de desempleo, m es la emisión monetaria y p es el nivel inflacionario, siendo-γ el coeficiente negativo de vínculo entre los cambios de los salarios reales y el nivel de desempleo. De esta forma, m y p en forma conjunta representa la creación de salarios reales. La emisión monetaria por encima de los niveles inflacionarios llevará a la expansión de los saldos reales, una política monetaria expansiva, con el correspondiente aumento del nivel de actividad y una caída de los niveles de desempleo. En forma contraria, una inflación mayor a la emisión monetaria contraerá la actividad económica y aumentará el desempleo. La emisión monetaria m puede ser considerada una función respecto del tiempo m(t), ya que representa la tasa de crecimiento o variación de la cantidad de dinero nominal en la economía. En este caso, tomaremos m como una variable exógena, al ser considerada una decisión política, por lo que se plantea como una constante a lo largo del tiempo, y solo cambiaría por la autoridad monetaria.

Este planteo es suficiente para, a través de la aplicación de ecuaciones diferenciales de orden superior, poder encontrar la trayectoria temporal de las expectativas inflacionarias. La resolución del modelo con sus correspondientes coeficientes y su propia interpretación es tema específico de las materias de macroeconomía avanzada. En cambio, a través del trabajo de dicho modelo con la incorporación de valores en sus coeficientes es posible proponer un ejercicio económico que destaque los aspectos de las ecuaciones diferenciales que es de nuestro interés.

Para tal fin, se propone a continuación un desarrollo del caso propuesto por Bernardello y otros (2004), donde se trabaja con estas ecuaciones, pero en un caso particular, con los coeficientes precisos de la siguiente manera, donde α=1/10, h=4/5 e γ=3/5:

$$\begin{cases} p = \frac{1}{10} - 4U + \frac{2}{5}\pi \\ \pi' = \frac{4}{5}(p - \pi) \\ U' = -\frac{3}{5}(m - p) \end{cases}$$

Desde este planteo, el objetivo es lograr identificar la trayectoria temporal de las expectativas inflacionarias π(t). En este sentido, es necesario poder resolver el sistema de ecuaciones planteado con anterioridad. En primer lugar, se puede reemplazar la variable de inflación (p) de la segunda ecuación del sistema (π’) por la primera ecuación, donde se encuentra su formulación, tal que:

$$\pi' = \frac{4}{5}\left[\left(\frac{1}{10} - 4U + \frac{2}{5}\pi\right) - \pi\right]$$

$$\pi' = \frac{2}{25} - \frac{16}{5}U - \frac{12}{25}\pi$$

Esta ecuación ya relaciona la derivada de la función de expectativas inflacionarias en función del desempleo y las expectativas inflacionarias, comenzando a identificarse las ecuaciones diferenciales, donde una función derivada depende de su función sin derivar. Pero para terminar de resolver este sistema es necesario continuar con las sustituciones. Si bien la función U no está presente en nuestro sistema, se propuso U’. Por lo tanto, será posible sustituir U’ en dicha ecuación, en la medida que volvamos a derivar π’, tal que:

$$\pi'' = -\frac{16}{5}U' - \frac{12}{25}\pi'$$

$$\pi'' = -\frac{16}{5}\left[-\frac{3}{5}(m - p)\right] - \frac{12}{25}\pi'$$

$$\pi'' = \frac{48}{25}(m - p) - \frac{12}{25}\pi'$$

Por último, para poder resolver nuestro problema, es necesario reemplazar p de nuestra última ecuación. La misma la podemos plantear desde la segunda ecuación del sistema original, π', a través de despejar la misma, obteniendo:

$$\pi' = \frac{4}{5}(\mathrm{p} - \pi)$$

$$\frac{5}{4}\pi' = (\mathrm{p} - \pi)$$

$$\mathrm{p} = \frac{5}{4}\pi' + \pi$$

Reemplazando en la función π'':

$$\pi'' = \frac{48}{25}\left[\mathrm{m} - \left(\frac{5}{4}\pi' + \pi\right)\right] - \frac{12}{25}\pi'$$

$$\pi'' = \frac{48}{25}\mathrm{m} - \frac{12}{5}\pi' - \frac{48}{25}\pi - \frac{12}{25}\pi'$$

$$\pi'' = \frac{48}{25}\mathrm{m} - \frac{12}{5}\pi' - \frac{48}{25}\pi - \frac{12}{25}\pi'$$

$$\pi'' + \frac{72}{25}\pi' + \frac{48}{25}\pi = \frac{48}{25}\mathrm{m}$$

De esta forma, se llega al planteo de una ecuación diferencial de segundo orden. La misma es posible de ser resuelta por medios de los procedimientos analizados en la cátedra Matemática para Economistas, donde se trabaja específicamente este tema. En este sentido, primero se estudiará la solución para el caso homogéneo, a través del estudio de la ecuación característica, y posteriormente se propondrá una solución para el caso no homogéneo.

Según la ecuación diferencial planteada, a través de los coeficientes de sus distintos términos, la ecuación característica queda planteada como:

$$r^2 + \frac{77}{25}r + \frac{48}{25} = 0$$

Donde sus raíces son r1=-1,048 y r2= -1,832. Por lo tanto, la solución del caso homogéneo con coeficientes constantes quedaría planteada de la siguiente forma:

$$\mu_h(t) = C_1 e^{-1{,}048\,t} + C_2 e^{-1{,}832\,t}$$

Por otro lado, la solución para el caso homogéneo parte de una propuesta según la forma que asuma el término no homogéneo. En este caso, el término corresponde a un polinomio de grado cero (48/25 m), ya que se ha considerado m como una constante a lo largo del tiempo, por lo tanto, queda planteado:

$$y_p = A\,;\; y' = 0\,;\; y'' = 0$$

Entonces, reemplazando en nuestra formulación original:

$$0 + \frac{72}{25}0 + \frac{48}{25}A = \frac{48}{25}m$$

$$A = \frac{48}{25}.\frac{25}{48}.m \;\rightarrow A = m$$

Entonces, arribamos a nuestra solución de la ecuación diferencial de segundo orden que caracteriza el comportamiento de la trayectoria de las expectativas inflacionarias a lo largo del tiempo, de la forma:

$$\mu(t) = C_1 e^{-1{,}048\,t} + C_2 e^{-1{,}832\,t} + m$$

Este modelo plantea que, por lo tanto, la trayectoria temporal de las expectativas inflacionarias a lo largo del tiempo, bajo el modelo de expectativas adaptativas, fluctuará alrededor del valor de m, el cual representa la emisión monetaria. Cambios en m impactarán tanto en la formación de precios como en las expectativas inflacionarias, variables que se acomodarán en forma fluctuante suavizada alrededor del nuevo valor.

Asimismo, cambios en la emisión monetaria m implicarán un doble impacto sobre el nivel de precios, a partir de estas conclusiones. En primer lugar, según nuestra ecuación U' original, la emisión monetaria por encima de la inflación genera caída en los niveles de desempleo, los que asimismo llevarán a aumentos en los niveles inflacionarios. Por otro lado, aumentos en los niveles de emisión monetaria impactarán también en las expectativas inflacionarias, lo que también repercutirán en los niveles de inflación.

Por otro lado, al identificar que ambas raíces de la ecuación característica de la ecuación homogénea asociada presentan valores negativos es deduce que presenta una trayectoria temporal estable, por lo que a lo largo que transcurra el tiempo, sin mediar cambios en las condiciones iniciales del modelo ni en la emisión monetaria, habrá estabilidad.

Las conclusiones de este modelo son posibles de ampliar para analizar la trayectoria del desempleo U o del nivel de inflación p a lo largo del tiempo, y de esta forma completar el análisis al que se arriba interpretando la curva de Phillips.

Este planteo, desarrollado con ciertos coeficientes específicos, variará según las raíces de la ecuación característica. En el caso planteado las mismas eran raíces reales y diferentes, pero dicho caso también puede asumir raíces reales e iguales, o raíces complejas. Para cada uno de estos casos lo que cambiará es la propuesta de la solución homogénea y su forma funcional, pero las conclusiones serán las mismas, y se mantendrá la dinámica estable del modelo (Chiang&Wainqright; 2006).

Conclusiones

El planteo desarrollado permite vincular y profundizar el análisis de la aplicación de un tema específico de la cátedra Matemática para Economistas, en un modelo económico que los alumnos estudian en Macroeconomía. Precisamente, el análisis de las trayectorias temporales de las expectativas inflacionarias en el modelo de Phillips respecto a los vínculos entre la inflación y el desempleo brinda una posibilidad de aplicar los conceptos asociados a las ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes.

En el estudio del modelo se puede deducir el comportamiento de las expectativas inflacionarias. Asimismo, permite identificar que las mismas dependen de los niveles de emisión monetaria, y vuelven a relacionar la emisión con la inflación, a través de las expectativas. Por otro lado, también se concluye la estabilidad del modelo planteado, por lo que su tendencia a lo largo del tiempo llevará a una situación estable, de equilibrio. Esta trayectoria puede verse perturbada por cambios en la emisión monetaria, pero una vez asumidos los cambios, la trayectoria se ubicará alrededor de otro equilibrio.

Se trata, en consecuencia, de arbitrar los medios necesarios que estén disponibles para vincular de manera concreta el contenido matemático con el campo de formación profesional específico, cuestión que contribuye a la motivación de los estudiantes y a hacer notar la potencia que los contenidos matemáticos tienen en la formación de un economista.

Referencias bibliográficas

Bernardello, A. y otros. (2004). Matemáticas para Economistas. Buenos Aires. EditorialOmicronSystem

Chiang, A. &Wainwright, A. (2006) Métodos fundamentales de economía matemática. México. McGraw-Hill

GarciaVenturini, A. &Kicillof, A. (2015) Análisis Matemático II para estudiantes de Ciencias Económicas. Buenos Aires. Ediciones Cooperativas.

Sachs, J. &Larrain, F. (1994) Macroeconomía en la economía global. México. Prentice Hall Hispanoamérica.

Schneeberger, Marino (2018). Enseñar, aprender y evaluar Matemática en carreras de Ciencias Económicas. Gestando. N°20. Páginas 30-39.

Schneeberger, Marino y otros. (2017). Impacto de las metodologías de enseñanza en el rendimiento académico. Gestando N°19. Páginas 4-9.

Sydsaeter, K &Hammond, P. (1996) Matemáticas para el análisis económico. Madrid. Prentice Hall.