99 APLICACIONES ECONÓMICAS DE OPTIMIZACIÓN CON UNA RESTRICCIÓN

Acinas, Sonia Ester – Veralli, Fabiana Edit
Facultad de Ciencias Económicas y Jurídicas, Universidad Nacional de La Pampa
sonia.acinas@gmail.com –fabianae90@yahoo.com

Especialidad: Matemática Aplicada

Palabras Clave: Función de Utilidad, Optimización, Curvas de Nivel, Multiplicadores de Lagrange

Resumen

Los problemas económicos donde se aplican las herramientas matemáticas son imprescindibles para que el estudiante le encuentre "sentido" al estudio del análisis matemático en la carrera de Contador Público y Licenciado en Administración.
En este trabajo se hará una breve reseña sobre curvas de nivel y optimización de funciones de dos variables con una restricción.
Luego, se introducirá el concepto de función de utilidad del consumidor, la cual depende del nivel de consumo de cada bien, según sus gustos, preferencias, etc. Los distintos niveles de utilidad generan las curvas de nivel de la función de utilidad y estas curvas se alejan del origen de coordenadas a medida que aumenta el nivel de utilidad. Si el presupuesto del consumidor fuera infinito, elegiría siempre la curva de nivel que se encuentre más alejada del origen, porque le representaría una mayor utilidad. Pero como el ingreso es limitado, el consumidor se encuentra con una restricción presupuestaria y es necesario aplicar alguna herramienta matemática para determinar la combinación óptima de bienes de acuerdo a su nivel de ingreso.
Por último, se simulará otra situación en la cual se calculará el mínimo costo total de una empresa, teniendo una restricción en la capacidad de almacenaje de las unidades producidas.
El método de los multiplicadores de Lagrange será la herramienta que emplearemos para abordar estos problemas.

1 Breve introducción a la optimización de funciones de dos variables reales

En la mayoría de las aplicaciones es necesario afrontar situaciones en las cuales una cantidad depende no sólo de una variable sino de varias variables. En estos casos es necesario manipular funciones de varias variables independientes.
En particular, consideraremos funciones de dos variables independientes y en general las denotaremos x e y. La variable dependiente se denotará con z y usaremos las notación $z=f(x, y)$ para indicar que z es función de x e y.
Sea D un conjunto de pares de números reales (x,y) y sea f una regla que asigna un único número real a cada par $(x,y) \in D$.
Diremos que f es una función de dos variables x e y y que el conjunto D es el dominio.
El valor de f en el par (x,y) se denota por f(x,y) y el conjunto de todos esos valores se denomina recorrido de f.

1.1 Superficies y curvas de nivel

Para bosquejar la gráfica de $z=f(x,y)$ son necesarias coordenadas en 3 dimensiones: una para cada variable x, y y z. Es así que surgen los ejes x, y y z los cuales se construyen determinando ángulos rectos entre sí.
A su vez, cada par de ejes determina un plano. En el plano xy, se tiene z=0 y las coordenadas x e y se manejan de la manera usual para localizar puntos en el plano. En forma análoga, los puntos del plano xz satisfacen la condición y=0 y todos los puntos del plano yz satisfacen la condición x=0.

Sea z=f(x,y) una función de dos variables. Su dominio D es el conjunto de puntos del plano xy en que la función está definida.

Para cualquier punto (x,y) en D se obtiene el valor z=f(x,y) y graficamos el punto (x,y,z) en 3 dimensiones. Haciendo esto para cada punto (x,y) $\in$ D, obtenemos un conjunto de puntos (x,y,z) que forman una superficie en 3 dimensiones.

Existe un punto (x,y,z) sobre esta superficie situado por encima de cada punto del dominio D (o debajo si z=f(x,y) toma valores negativos). Esta superficie es la gráfica de la función z=f(x,y).

Bosquejar una superficie en 3 dimensiones que sea la gráfica de una función z=f(x,y), no es tan simple como hacer la gráfica de una función de una sola variable. Por ello, con frecuencia suele ser útil examinar las secciones de la gráfica. Tales secciones son cortes realizados sobre la gráfica por medio de planos.

Las secciones resultantes de planos horizontales (paralelos al plano xy) constan de los puntos de la gráfica situados a una altura constante por encima (o por debajo) del plano xy. Tales secciones horizontales puede graficarse como una curva en el plano xy y se denominan curvas de nivel.

Dado que un plano horizontal en 3 dimensiones satisface una ecuación del tipo z=c en donde c es una constante que da la altura del plano por encima del plano xy (o debajo si c<0), las curvas de nivel se obtienen a partir de f(x,y)=c.

1.2 Optimización

Uno de los temas más importantes en el cálculo de funciones de una sola variable es la determinación de extremos. Igual de importante es el correspondiente tópico para funciones de varias variables.

La función z=f(x,y) tiene un máximo relativo (o local) en el punto (x_0, y_0) si f(x,y)<$f(x_0, y_0)$ para todos los puntos (x,y) cercanos a (x_0, y_0) con excepción del mismo (x_0, y_0). El valor $f(x_0, y_0)$ se denomina valor máximo local de f.

La función f(x,y) tiene un mínimo relativo (o local) en el punto (x_0, y_0) si f(x,y)> $f(x_0, y_0)$para todos los puntos (x,y) cercanos a (x_0, y_0) con excepción del mismo (x_0, y_0).

El valor $f(x_0, y_0)$ se denomina valor mínimo local de f.

Tanto máximos como mínimos relativos (o locales) son extremos de la función f.

Consideraremos funciones cuyas gráficas sean superficies suaves en 3 dimensiones y entenderemos que z=f(x,y) es suave si existen y son finitas todas las derivadas parciales de primer y segundo orden en el dominio de la función.

Como en el caso de funciones de una variable, se tiene una condición necesaria para la existencia de extremos.

Teorema:

Sean $f: D \subset R^2 \to R$ suave y (x_0, y_0) un punto interior de D.

Si f(x,y) tiene un extremo relativo en (x_0, y_0), entonces $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

A su vez, un punto crítico de una función suave f(x,y) es un punto (x_0, y_0) para el cual se verifica $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

Para funciones no suaves, los puntos donde no existe alguna de las derivadas primeras también se denominan puntos críticos.

La definición de punto crítico se generaliza automáticamente a funciones de más de 2 variables.

Para determinar la naturaleza de los puntos críticos de una función de 2 variables reales, se cuenta con criterios que emplean las derivadas segundas de z=f(x,y).
A partir de las derivadas segundas de la función z=f(x,y) se define la matriz Hessiana por medio de

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix} \quad (1)$$

El correspondiente criterio de la derivada segunda para optimizar funciones de dos variables independientes es el siguiente.

Teorema:

Sean $f: D \subset R^2 \to R$ suave y un punto interior de D.

Sea (x_0, y_0) un punto crítico de f(x,y).

Sea $Hf(x_0, y_0)$ la matriz Hessiana de f evaluada en el punto crítico (x_0, y_0) .

Si $det(Hf(x_0, y_0)\ ) > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0)$ <0, entonces f tiene un valor máximo relativo en (x_0, y_0).

Si $det(Hf(x_0, y_0)\ ) > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0)$ >0, entonces f tiene un valor mínimo relativo en (x_0, y_0) .

Si $det(Hf(x_0, y_0)\ )$, entonces f tiene un punto de silla en (x_0, y_0).

Si $det(Hf(x_0, y_0)\ ) = 0$, el criterio no decide.

Para el caso en el que se plantea una restricción, es necesario emplear no sólo la función a optimizar sino también la función que modela tal restricción. Es así que se construye una función auxiliar llamada Lagrangiano y a partir del análisis de esta función auxiliar es posible conseguir el óptimo de la función original sujeta a la restricción dada.
A continuación, desarrollamos el tema.

Supongamos que $f: D \subset R^2 \to R$ y $g: D \subset R^2 \to R$ son funciones suaves.

Sea (x_0, y_0) un punto interior de D y supongamos que $g_x(x_0, y_0)$ y $g_y(x_0, y_0)$ no se anulan simultáneamente.

Sea c un número real y consideramos la función auxiliar Lagrangiana dada por

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda[c - g(x, y)], \ (2)$$

siendo λ una nueva variable que se denomina multiplicador de Lagrange.

El método de multiplicadores de Lagrange establece que si (x_0, y_0, λ_0) es punto crítico de $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ entonces (x_0, y_0) es punto crítico de f(x,y) sujeta a la restricción g(x,y)=c y viceversa.

Luego, un punto crítico (x_0, y_0, λ_0) de $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$ es aquel punto para el cual se verifican las siguientes condiciones de primer orden

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x_0, y_0, \lambda_0) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

A continuación, construimos la matriz Hessiana ampliada u orlada dada por

$$H\mathcal{L}(x,y,\lambda)=\begin{bmatrix}\mathcal{L}_{xx}(x,y) & \mathcal{L}_{xy}(x,y) & \mathcal{L}_{x\lambda}(x,y)\\ \mathcal{L}_{yx}(x,y) & \mathcal{L}_{yy}(x,y) & \mathcal{L}_{y\lambda}(x,y)\\ \mathcal{L}_{\lambda x}(x,y) & \mathcal{L}_{\lambda y}(x,y) & \mathcal{L}_{\lambda\lambda}(x,y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathcal{L}_{xx}(x,y) & \mathcal{L}_{xy}(x,y) & \mathcal{L}_{x\lambda}(x,y)\\ \mathcal{L}_{yx}(x,y) & \mathcal{L}_{yy}(x,y) & \mathcal{L}_{y\lambda}(x,y)\\ \mathcal{L}_{\lambda x}(x,y) & \mathcal{L}_{\lambda y}(x,y) & 0\end{bmatrix} \quad (4)$$

Y a partir de la matriz Hessiana ampliada se tiene el siguiente criterio de derivadas segundas para la optimización de la función z=f(x,y) sujeta a la restricción g(x,y)=c.

Si $det\big(H\mathcal{L}(x_0,y_0,\lambda_0)\big)>0$ entonces la función f tiene un valor máximo relativo en (x_0,y_0) de sujeta a la restricción g(x,y)=c.

Si $det\big(H\mathcal{L}(x_0,y_0,\lambda_0)\big)<0$ entonces la función f tiene un valor mínimo relativo en (x_0,y_0) sujeta a la restricción g(x,y)=c.

Si $det\big(H\mathcal{L}_x(x_0,y_0,\lambda_0)\big)=0$, el criterio no decide.

2 La función de utilidad

Los consumidores tienen preferencias que definen las adquisiciones de bienes en el mercado, tales como el precio, la calidad, las tendencias de la moda, entre otros factores, los cuales en muchas ocasiones no son sólo objetivos sino subjetivos. Por este motivo el consumidor establece una “utilidad” de acuerdo a sus necesidades y posibilidades, a la cual sólo puede asignar un valor el propio consumidor y que no tiene que ser comparable con la de otro consumidor. Por ejemplo, en una confitería el consumidor A que está sentado en una mesa solicita un submarino, lo consume y en ese momento subjetivamente le asigna un determinado valor. Como hace frío, decide pedir un segundo submarino, pero su estado no es el mismo que antes de consumir el 1º submarino, por ende la utilidad que le proporciona este nuevo consumo no será la misma que cuando consumió la bebida por primera vez.

La utilidad “es el beneficio o la satisfacción que se deriva del consumo de un bien”

Las preferencias de un consumidor se relacionan estrechamente con la edad, sexo, moda, situación económica, entre otros factores.

Para poder trabajar con las herramientas matemáticas es necesario abstraerse de los factores que influyen en las decisiones del consumidor, por ende en la curva sólo se muestran los dos bienes que el consumidor está dispuesto a adquirir para obtener cierto nivel de utilidad.

Las curvas de indiferencia en economía representan las distintas combinaciones de dos bienes que tienen el mismo nivel de utilidad para el consumidor.

Un determinado nivel de utilidad puede alcanzarse con distintas combinaciones de los bienes, como puede apreciarse en la Figura 1.

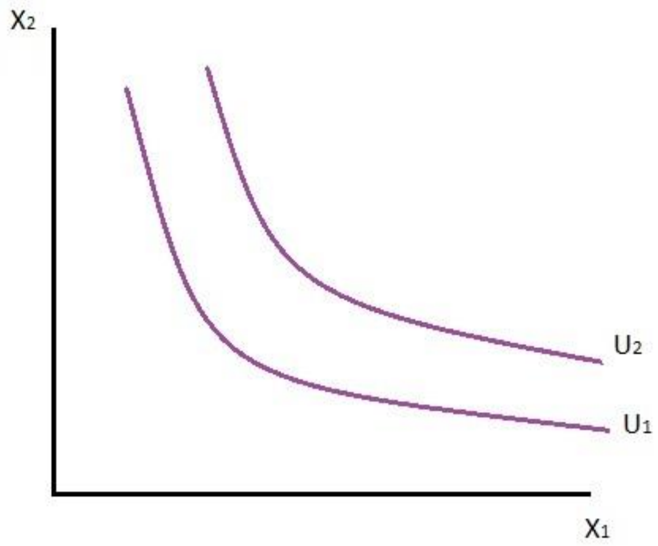

Figura 1. Curvas de indiferencia

Desde un punto de vista estrictamente matemático, las curvas de indiferencia son las curvas de nivel de la función de utilidad.

No realizaremos un estudio detallado de las características de las curvas de indiferencia, ya que no hacen al objetivo del presente trabajo, sólo se mencionan para desarrollar el tema elegido.

Ahora bien, cada consumidor no tiene ingresos infinitos. Esto significa que en algún momento encontrará una "restricción" en su elección dada por sus ingresos.

Para considerar esta restricción, tomaremos los precios de los bienes que conforman la curva de utilidad y la recta presupuestaria estará definida por Ingreso (I) = Precio del bien 1 (P_1) x Cantidad del bien 1(X_1) + Precio del bien 2 (P_2) x Cantidad del bien 2(X_2).

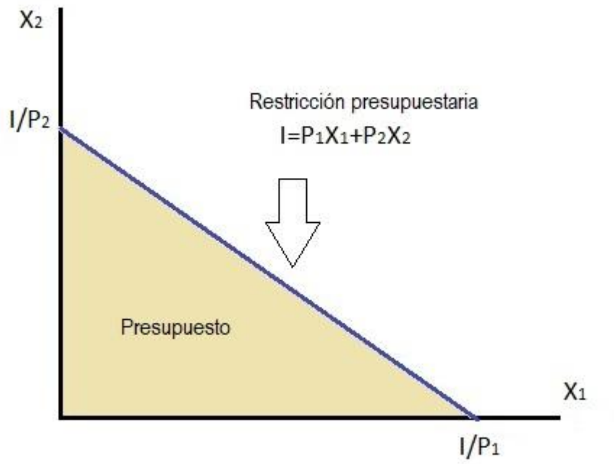

Figura 2. Restricción presupuestaria

3 Ejemplos de aplicaciones económicas

a) Trabajaremos con la función de utilidad del consumidor dada por $U = \sqrt{x_1 x_2}$.

x_1 y x_2 son las cantidades de los bienes que el consumidor puede adquirir en el mercado. Cada bien tiene asociado su precio P_1 =12 u.m y P_2 =10 u.m.

En este caso, buscamos maximizar la utilidad del consumidor teniendo en cuenta la restricción dada por su ingreso (I) de 154 u.m.

Es así que la función a optimizar es $U=\sqrt{x_1x_2}$ sujeta a la restricción presupuestaria dada por

$I=12x_1+10x_2=154.$

Por lo tanto, resulta que la función de Lagrange a asociada al problema es

$\mathcal{L}(x_1,x_2,\lambda)=\sqrt{x_1x_2}+\lambda[154-(12x_1+10x_2)].$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{x_1}(x_1,x_2,\lambda)=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}-12\lambda=0 \\ \mathcal{L}_{x_2}(x_1,x_2,\lambda)=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}-10\lambda=0 \\ \mathcal{L}_{\lambda}(x_1,x_2,\lambda)=154-12x_1-10x_2=0. \end{cases} \quad (5)$$

Resolvemos el sistema y obtenemos $(x_1,x_2,\lambda)=\left(\frac{77}{12},\frac{77}{10},\frac{\sqrt{30}}{120}\right)$ que es un punto crítico de $\mathcal{L}(x_1,x_2,\lambda)$ y por lo tanto $(x_1,x_2)=\left(\frac{77}{12},\frac{77}{10}\right)$ es punto crítico de la función de utilidad dada por $U=\sqrt{x_1x_2}$ sujeta a la restricción $12x_1+10x_2=154.$

Ahora computamos la matriz Hessiana Orlada en el punto crítico de $\mathcal{L}(x_1,x_2,\lambda)$ y obtenemos

$$H\mathcal{L}(x_1,x_2,\lambda)=\begin{bmatrix} -0.043 & 0.036 & -12 \\ 0.036 & -0.0296 & -10 \\ -0..296 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $det\left(H\mathcal{L}(x_1,x_2,\lambda)\right)=12(0.7152)+10.(0.862)=17.2024>0$, entonces en $(x_1,x_2)=\left(\frac{77}{12},\frac{77}{10}\right)$ hay un máximo para la función $U=\sqrt{x_1x_2}$ sujeta a la restricción $12x_1+10x_2=154.$

Ese valor máximo es $U=\sqrt{\frac{77}{12}.\frac{77}{10}}\approx 7.029$

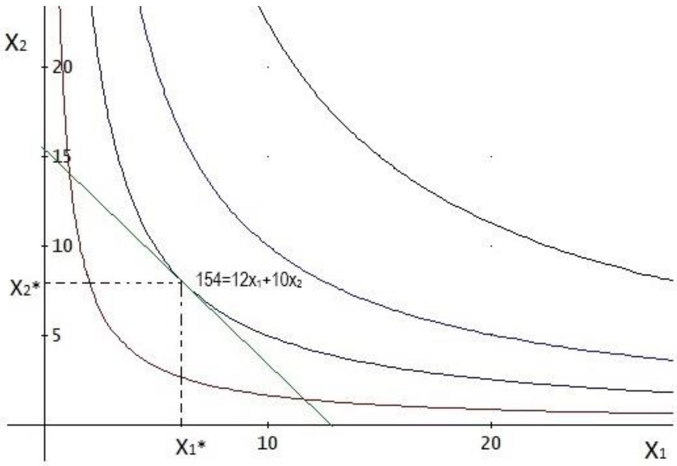

Figura 3. Optimización de la utilidad del consumidor de acuerdo a su Ingreso

En la Figura 3. se observa que el punto de tangencia entre la recta presupuestaria que representa la restricción y una de las curvas de indiferencia es el extremo buscado. Además, la constante que determina la curva de nivel con la que se produce la intersección con la curva de restricción resulta ser el valor extremo de la función que se está optimizando.
Podemos concluir que teniendo en cuenta la limitante de su nivel de ingreso de 154 u.m., los precios de 12 u.m para el bien x_1 y de 10 u.m. para el bien x_2, el consumidor logrará el máximo nivel de utilidad si adquiere $\frac{77}{12}$ unidades de x_1 y $\frac{77}{10}$ de x_2. Además, por cada u.m. que aumente el ingreso del consumidor, el nivel de utilidad se incrementará en $\frac{\sqrt{30}}{120}$.

b) Una empresa tiene una capacidad máxima de almacenaje de 1200 unidades ($Q=x_1+x_2$). La empresa cuenta con dos plantas ubicadas en dos localidades distintas donde lleva adelante la producción. La función de costo total está dada por $CT=1,5x_1^2+x_1x_2+x_2^2$. Calcular qué cantidad deberá fabricar en cada planta para obtener el mínimo costo posible teniendo en cuenta que su limitante es de 1200 unidades.

Sean x_1 y x_2 las cantidades de los bienes que puede producir en las plantas 1 y 2 respectivamente. La función a optimizar es $CT = 1{,}5x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ sujeta a la restricción de almacenamiento dada por $Q = x_1 + x_2 = 1200$.
Por lo tanto resulta que la función de Lagrange asociada al problema es:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = L = 1{,}5x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + \lambda(1200 - x_1 - x_2)$$

A continuación, planteamos las condiciones de primer orden para la función de Lagrange:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = 3x_1 + x_2 - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = x_1 + 2x_2 - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_{\lambda}(x_1, x_2, \lambda) = 1200 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos el punto crítico del Lagrangiano $(x_1, x_2, \lambda) = (400{,}800{,}2000)$.
Computando el determinante de la matriz Hessiana orlada, podemos concluir que para minimizar el costo de producción con una limitante de 1.200 unidades para el almacenamiento, se deberán fabricar 400 unidades en la planta 1 y 800 unidades en la planta 2. Además, debe destacarse que por cada unidad adicional que se incremente el almacenaje, el costo total aumentará en 2.000 u.m.

4 Conclusiones

En este trabajo hemos desarrollado una breve introducción a las curvas de nivel y a la optimización de funciones de dos variables reales con una restricción. Hemos planteado un problema de naturaleza económica y lo hemos resuelto paso a paso aplicando los conceptos y técnicas matemáticos explicitados anteriormente. A continuación, se ha presentado otra situación problemática para que el alumno reconozca la utilidad de algunas herramientas que nos provee el análisis matemático en la resolución de problemas que involucren a otras funciones económicas.
Este trabajo podrá servir de base para avanzar en el estudio de situaciones más complejas en donde se consideren varias restricciones.

Referencias

Álvarez, H. (2010). *Notas de Cálculo*. San Luis: Nueva Editorial Universitaria-UNSL.

Arya, J., Lardner,R., Ibarra Mercado, V.H.(2009). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía*. Quinta Edición. México: Pearson.

Graue, A. (2014). *Introducción a la Economía*. Primera edición. México: Pearson

Haeussler, P. (2015). *Matemática para administración y economía*. Décimo tercera edición. México: Pearson

Leithold, L. (1992). *El Cálculo con geometría analítica*. Sexta Edición. México: Harla.

Piskunov, N. (1994). *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Limusa - Grupo Noriega Editores.