100 MODELOS DINÁMICOS DISCRETOS: RESOLUCIÓN DEL MODELO DE PRODUCCIÓN AGRÍCOLA

Nastri, Miguel Ángel – García Venturini, Alejandro
Facultad de Ciencias Económicas – UBA
miguelangelnastri@yahoo.com.ar – aegv@hotmail.com

Especialidad: Matemática Aplicada

Palabras Claves: Dinámica económica. Variable discreta

Resumen

En los problemas económicos, en los cuales, su comportamiento es función del tiempo, se da lugar a la formación de ecuaciones funcionales en las que sus variables y resultados están determinados moviéndose temporalmente dando lugar a sistemas dinámicos que se analizan y resuelven en la disciplina de la Dinámica Económica.-
En cada fenómeno económico de esta Dinámica Económica, en la cual la variable independiente es el tiempo, ésta puede tener una variación continua constituyendo un problema de dinámica continua y las ecuaciones funcionales que se plantean son ecuaciones diferenciales ordinarias.- Si la variable tiene una variación discreta, las ecuaciones funcionales que se plantean son ecuaciones en diferencias, constituyendo un problema de dinámica discreta.-
La solución de una ecuación en diferencias, respecto de un conjunto A, determina una función, cuyos valores reducen la ecuación en diferencias a una identidad en el conjunto A, lo que implica que los valores de la solución satisfacen la ecuación en diferencias para cada valor de A.-
Finalmente se deberá analizar la estabilidad de la solución.-
Como aplicación de un modelo dinámico discreto, se desarrolla el Modelo de Producción Agrícola, que da lugar al planteo y resolución de una ecuación en diferencias lineal de primer orden, con coeficientes constantes.-

1. Introducción

Planteamos en este trabajo una aplicación de las ecuaciones en diferencias orientado al modelo de producción agrícola. Previamente recordamos algunos conceptos básicos del tema.

1.1 Ecuaciones en diferencias

Las ecuaciones en diferencias pueden ser fundamentalmente de dos tipos: 1) las ordinarias: si interviene solo una variable independiente, 2) en diferencias parciales si intervienen dos o más variables.
Para el caso 1), el orden lo determina la diferencia de orden mayor y el grado es el mayor exponente que afecta a las diferencias.
Ejemplo:

$$3\Delta^4 y_t + 5\left(\Delta y_t\right)^2 + y_t = 0 \quad (1)$$

Es una ecuación en diferencias de grado 2 y orden 4.
Una ecuación en diferencias lineal, puede expresarse en forma normal como

$$y_{t+n} = \frac{g(t)}{f_0(t)} - \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(t)}{f_0(t)} . y_{t+n-i} \quad (2)$$

La ecuación en diferencias lineal de primer orden es

$$f_0(t).y_{t+1} + f_1(t).y_t = g(t) \quad (3)$$

Se expresa en forma normal:

$$y_{t+1} = -\frac{f_1(t)}{f_0(t)}.y_t + \frac{g(t)}{f_0(t)} \quad (4)$$

Si $f_1(t)$, $f_0(t)$ y $g(t)$ son constantes numéricas

$$A = -\frac{f_1(t)}{f_0(t)}, \ (5)$$

$$B = \frac{g(t)}{f_0(t)}, \ (6)$$

entonces

$$y_{t+1} = A.y_t + B \quad (7)$$

Para $t = 1$,

$$y_1 = A.y_0 + B \quad (8)$$

Para $t = 2$,

$$y_2 = A.y_1 + B = A.(A.y_0 + B) + B = A.y_0^2 + B.(1 + A) \quad (9)$$

Y así sucesivamente

Para $t = n$,

$$\begin{cases} y_t = A^t.y_0 + B.\dfrac{1-A^t}{1-A} & si\ A \neq 1 \\ y_t = y_0 + B & si\ A = 1 \end{cases} \quad (10)$$

Para $A \neq 1$:

$$y_t = A^t.\left(y_0 - \frac{B}{1-A}\right) + \frac{B}{1-A} \quad (11)$$

Si hacemos:

$$y^* = \frac{B}{1-A}, \quad (12) \text{ resulta}$$

$$y_t = A^t.(y_0 - y^*) + y^* \quad (13)$$

El comportamiento de la sucesión $\{y_t\}$, de la ecuación en diferencias lineal de 1º orden:

$$y_{t+1} = A.y_t + B \quad (14),$$

para t = 0,1,2,...., resulta del análisis de la sucesión[1]:

[1] Ver Nastri, Miguel Angel y Fajfar, Pablo Francisco (2006). *Modelos dinámicos discretos*. Buenos Aires. Ediciones Cooperativas.

1) Si $A \neq 1$; $y_0 = y^*$; $y_t = y^*$ — $\{y_t\}$ es constante e igual a y_0^*.

2) Si $A > 1$; $y_0 > y^*$; $y_t > y^*$ — $\{y_t\}$ es monótona creciente, divergente y tiende a $+\infty$.

3) Si $A > 1$; $y_0 < y^*$; $y_t < y^*$ — $\{y_t\}$ es monótona decreciente, divergente y tiende a $-\infty$.

4) Si $0 < A < 1$; $y_0 > y^*$; $y_t > y^*$ — $\{y_t\}$ es monótona decreciente, converge hacia y^*.

5) Si $0 < A < 1$; $y_0 < y^*$; $y_t < y^*$ — $\{y_t\}$ es monótona creciente, converge hacia y^*.

6) Si $-1 < A < 0$; $y_0 \neq y^*$ — $\{y_t\}$ es oscilante amortiguada alrededor de y^*.

7) Si $A = -1$; $y_0 \neq y^*$ — $\{y_t\}$ es divergente, oscilante, finita.

8) Si $A < -1$; $y_0 \neq y^*$ — $\{y_t\}$ es divergente, oscilante, infinita.

9) Si $A = 1$; $B = 0$, $y_t = y_0$ — $\{y_t\}$ es constante e igual a y_0.

10) Si $A = 1$; $B > 0$, $y_t > y_0$ — $\{y_t\}$ es monótona creciente, divergente y tiende a $+\infty$.

11) Si $A = 1$; $B < 0$, $y_t < y_0$ — $\{y_t\}$ es monótona decreciente, divergente y tiende a $-\infty$.

2. Modelo de Producción Agrícola

Consideremos que la oferta en un período es función lineal del precio en el período anterior.- Como resultado del funcionamiento de este mercado agrícola, al final de cada período aparece la producción total elaborada en el mismo período y el mercado determina el precio en función de la cantidad ofertada y demandada, mientras que la demanda del mercado absorba toda la cantidad ofertada en el período.-

La cantidad demandada en el período t es:

$$D_t = a + b.p_t \text{ , con } a > 0,\ b < 0 \quad (15)$$

La cantidad ofertada en el período t es:

$$S_t = c + d.p_{t-1} \text{ , con } c < 0,\ d > 0 \quad (16)$$

La cantidad ofertada y la cantidad demandada son iguales en el período t:

$$D_t = S_t \quad (17)$$

Reemplazando S_t y D_t resulta:

$$a + b.p_t = c + d.p_{t-1} \quad (18)$$

Despejando:

$$p_t = \frac{d}{b}.p_{t-1} + \frac{c-a}{b} \quad (19)$$

Efectuando un desplazamiento, resulta:

$$p_{t+1} = \frac{d}{b}.p_t + \frac{c-a}{b} \quad (20)$$

Que es una ecuación en diferencias lineal de primer orden.-

La solución general de la ecuación en diferencias lineal de primer orden es:

$$p_t = \left(\frac{d}{b}\right)^t \cdot \left(p_0 - \frac{a-c}{d-b}\right) + \frac{a-c}{d-b}, \quad (21)$$

donde $\frac{d}{b} < 0$ y el precio de equilibrio es:

$$p^* = \frac{a-c}{d-b} \quad (22)$$

3. Desarrollo de un Modelo de Producción Agrícola

En un modelo de Producción Agrícola, la cantidad demandada es

$$D_t = 20 - 5p_t \quad (23)$$

y la cantidad ofertada es:

$$S_t = -1 + 2p_{t-1} \quad (24)$$

a.- Planteamos la ecuación en diferencias lineal

$$D_t = 20 - 5p_t, \quad S_t = -1 + 2p_{t-1} \quad (25)$$

igualando:

$$20 - 5p_t = -1 + 2p_{t-1} \quad (26)$$

$$-5p_t = 2p_{t-1} - 21 \quad (27)$$

$$p_t = -\frac{2}{5}p_{t-1} + \frac{21}{5} \quad (28)$$

Efectuando un desplazamiento:

$$p_{t+1} = -\frac{2}{5}p_t + \frac{21}{5} \quad (29)$$

Hallada la ecuación en diferencias lineal de primer orden, con: $a = 20$, $b = -5$, $c = -1$, $d = 2$

b.- El precio de equilibrio es:

$$p^* = \frac{a-c}{d-b} = \frac{20-(-1)}{2-(-5)} = \frac{21}{7} = 3 \quad (30)$$

El precio de equilibrio es: $p^* = 3$

4. Solución del problema

a.- La solución general de la ecuación en diferencias es:

$$p_t = \left(\frac{2}{-5}\right)^t \cdot \left(p_0 - \frac{21}{7}\right) + (3), \quad (31)$$

$$p_t = \left(\frac{2}{-5}\right)^t .(p_0 - 3) + (3) \quad (32)$$

b.- Análisis de la estabilidad de la solución:

La solución general de la ecuación en diferencias es:

$$y_t = A^t.(y_0 - y*) + y* \quad (33)$$

Con A = – 2/5 entonces: –1 < A < 0

Para $p_0 \neq p*$ $(p_0 \neq 3)$

El comportamiento de la sucesión y_t para los distintos valores de t pertenecientes a los naturales es oscilante amortiguada alrededor de $p*$.

c.- Suponiendo que el precio inicial es 10% inferior al precio de equilibrio del mercado, establecemos el número de períodos necesarios para que el precio se ajuste de tal forma que su diferencia en el equilibrio sea inferior al 0,1 %.

$$p_0 = 0{,}9.p* = 0{,}9\text{x}3 = 2{,}7 \quad (34)$$

$$p_t = 0{,}999.p* = 0{,}999\text{x}3 = 2{,}997 \quad (35)$$

Reemplazando en la solución general:

$$2{,}997 = \left(-\frac{2}{5}\right)^t .(2{,}7 - 3) + 3, \quad (36)$$

$$2{,}997 = \left(-\frac{2}{5}\right)^t .(-0{,}3) + 3 \quad (37)$$

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^t = \frac{-0{,}003}{-0{,}3} = 0{,}0001 = (0{,}01)^2 \quad (38)$$

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^t = 0{,}0001 \quad (39)$$

Elevando ambos miembros al cuadrado queda:

$$\left(\frac{4}{25}\right)^t = (0{,}0001)^2 \Rightarrow (0{,}16)^t = (0{,}0001)^2 \quad (40)$$

Aplicando logaritmos naturales, resulta

$$t.ln\, 0{,}16 = 2.ln\, 0{,}0001 \quad (41)$$

Despejando t:

$$t = \frac{2.ln\, 0{,}0001}{ln\, 0{,}16} = \frac{2\text{x}(-9{,}210340)}{-1{,}832581} = 10{,}4 \cong 10 \quad (42)$$

Determinamos que el número de períodos para que el precio sea 0,001 menor que el precio de equilibrio es de 10 períodos.-

5. Conclusiones y trabajos futuros

Las ecuaciones en diferencias permiten modelizar muchas situaciones que se presentan en la dinámica discreta.
A futuro la idea es seguir buscando situaciones de la economía donde las ecuaciones en diferencias resulten de utilidad para su modelización y resolución.

Referencias

Casparri, María Teresa (1976). *Diferencias y ecuaciones en diferencias*. Buenos Aires: Ed. El Coloquio.

De Césare. Elías A. (1967). *Nociones sobre ecuaciones con diferencias finitas*. Buenos Aires: Ed. Macchi.

Goldberg, Samuel (1964). *Introducción a las Ecuaciones en Diferencias Finitas*. Barcelona: Editorial Marcombo S.A.

Mickens, Ronald, E. (1987). *Difference Equations.* Nueva York: Editorial Van Nostrand Reinhold.

Nastri, Miguel Angel y Fajfar, Pablo Francisco (2006). *Modelos dinámicos discretos*. Buenos Aires: Ediciones Cooperativas.