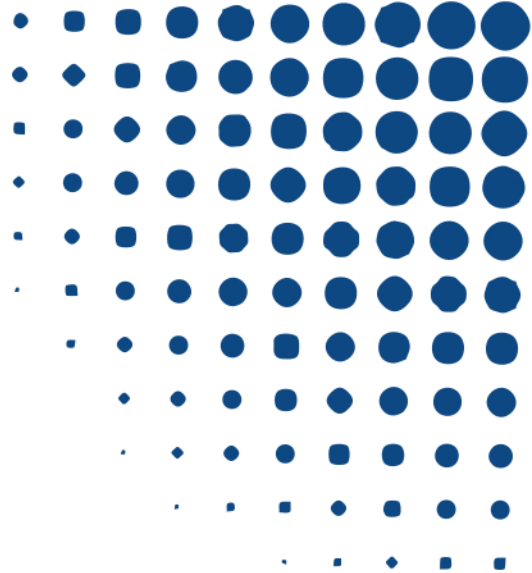




**CICLO
INTRODUCTORIO**

Matemática

Licenciatura en Marketing



**UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE MISIONES**



**Facultad de
Ciencias
Económicas**

UNIDAD I: CONJUNTOS NUMÉRICOS

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

En nuestra vida cotidiana vemos números a cada momento, nos parece algo tan natural que nos cuesta imaginarnos un mundo sin ellos. Sin embargo, son una creación del hombre.

Los números aparecieron con la idea de agrupar objetos semejantes y representar esas cantidades con símbolos.

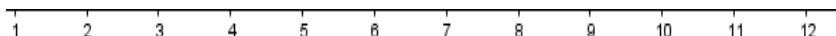
“Los números naturales permiten contar cuantos elementos hay en una colección, determinar qué posición ocupa un elemento en una lista e indicar que elemento es uno entre otros”.

Para referirse al conjunto de los números naturales, se usa el símbolo $\mathbb{N}$. También se suele escribir $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; \dots\}$, lo que se lee “ $\mathbb{N}$ es el conjunto formado por 1, 2, 3, 4 etcétera”. Si dos números son tales que uno es el sucesor del otro, como 3 y 4, entonces, se denominan consecutivos. Para expresar cualquier par de números consecutivos se usa n y $n + 1$.



- El primer número natural es el uno y cada número natural tiene un sucesor o siguiente, que se obtiene sumándole 1.
- Entre dos números naturales consecutivos, no existe ningún número natural.

Recta numérica: una manera de representar gráficamente los números naturales es señalarlos en la recta numérica y esto puede hacerse tomando diferentes escalas. En una recta se marca el 0, que es el origen desde donde se empieza a contar; la unidad es la distancia uniforme que separa dos números naturales consecutivos y la flecha indica el orden creciente.



EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

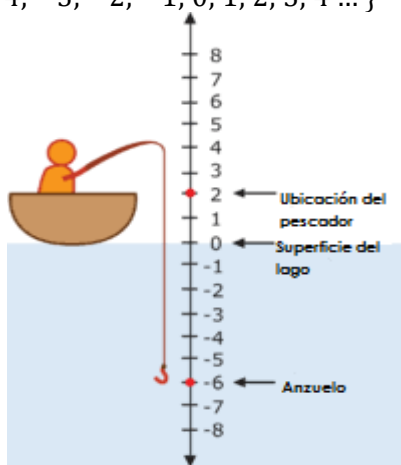
En la gran mayoría de las situaciones de la vida real en las que se usan números para registrar cantidades de objetos, se utilizan números naturales. Sin embargo, en algunos casos, además de registrar una cantidad o un orden, es necesario indicar su relación con respecto a una referencia que se toma como cero.

Los números con signo $+$ o $-$ indican transformaciones de una cantidad o comparaciones entre cantidades.



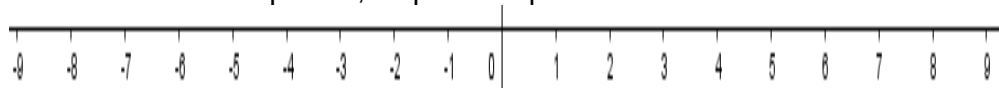
“El conjunto de los números enteros está formado por los números naturales, o enteros positivos, el cero y los números enteros negativos”

Para referirse a todos los números enteros, se usa $\mathbb{Z}$, o sea, $\mathbb{Z} = \{... -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4 ... \}$



Considerando la imagen, podemos evidenciar una aplicación de los números enteros, donde el nivel de la superficie del agua representa al cero, las unidades que se encuentran por debajo de la superficie son representadas por números con un signo menos delante (negativos) y los números que están representando alturas por sobre la superficie del agua son positivos (naturales)

Recta numérica: si la semirrecta que se utiliza para representar a los números naturales se extiende en el sentido opuesto, se puede representar a los números enteros.



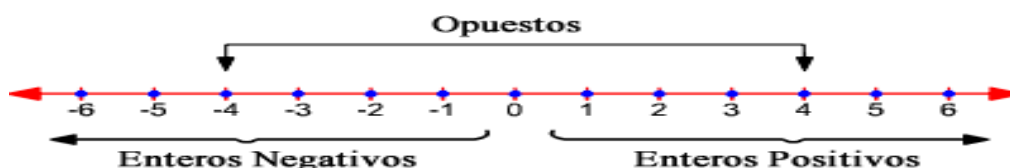
ConceptoDefinición

“Se llama **módulo de un número entero** a la distancia de ese número al cero y se anota colocando el número entre barras. Por ejemplo: $|-5| = 5$ y $|5| = 5$ ”



ConceptoDefinición

“Los números que tienen el mismo valor absoluto, o sea la misma distancia a 0, pero de distinto signo, se llaman **opuestos**. El opuesto de 0 es 0.”





Orden en $\mathbb{Z}$



- Si dos números son positivos, el mayor es el que tiene mayor valor absoluto, es decir, el que está más lejos del 0.
- Todo número positivo es mayor que cero.
- Todo número positivo es mayor que otro negativo.
- El cero es mayor que cualquier número negativo.
- Si dos números son negativos, el mayor es que tiene menor valor absoluto, es decir, el que está más cerca del 0.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES



ConceptoDefinición

“Un número racional es una expresión del tipo $\frac{a}{b}$ donde a y b son números enteros y b es distinto de cero. El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ está formado por todas las fracciones (positivas y negativas) y el cero”

Todo número racional se puede escribir en forma de fracción o de expresión decimal. Para encontrar la expresión decimal de una fracción se divide el numerador por el denominador.



- Cuando el cociente entre dos números enteros no es exacto, se puede expresar como un número fraccionario.
- Los números fraccionarios se pueden escribir también en forma decimal $\frac{1}{2} = 0,5$ $\frac{3}{4} = 0,75$ $\frac{5}{2} = 2,5$
- Las fracciones que se pueden transformar en fracciones decimales expresan números decimales exactos.
- Las fracciones que no se pueden transformar en fracciones decimales expresan decimales periódicos.

Reglas de transformación:

Para transformar una fracción decimal en un número decimal, escribimos el numerador y “corremos” la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros haya en el denominador.

$$\frac{12}{10} = 1,2 \qquad \frac{74}{10000} = 0,0074$$



Para transformar un número decimal exacto en una fracción decimal, escribimos en el numerador todas las cifras sin la coma y, en el denominador, el 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales haya en el número dado: $1,25 = \frac{125}{100}$ $0,014 = \frac{14}{1000}$

Para transformar una expresión periódica a fracción el numerador se obtiene restando el número sin la coma ni el periodo menos la parte no periódica, el denominador está formado por tantos nueves como cifras periódicas tenga.

$$2,3 = \frac{23 - 2}{9} = \frac{21}{9} \quad 13,\overline{3} = \frac{1325 - 13}{99} = \frac{1312}{99}$$

Para obtener fracciones equivalentes se pueden seguir dos caminos:



- Se multiplica el numerador y el denominador por un mismo número entero (distinto de cero). A este procedimiento se denomina **amplificación**.
- Se divide el numerador y el denominador por un número que sea divisor de los dos. A este procedimiento se lo denomina **simplificación**.

Una fracción es decimal cuando el denominador está formado por el 1 seguido de ceros. Una fracción es irreducible cuando el máximo común divisor entre el numerador y el denominador es 1, es decir, no se puede simplificar.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Todo número racional tiene una expresión decimal, exacta o periódica; para obtenerla basta dividir el numerador por el denominador, ahora bien:



ConceptoDefinición

“Aquellos números que tienen expresiones decimales infinitas y no periódicas se llaman **irracionales**, estos números no pueden escribirse como fracción de dos enteros. $\sqrt{2} = 1,4142135624 \dots$, la cual al conjunto de esos números lo denotaremos con la letra **I**”

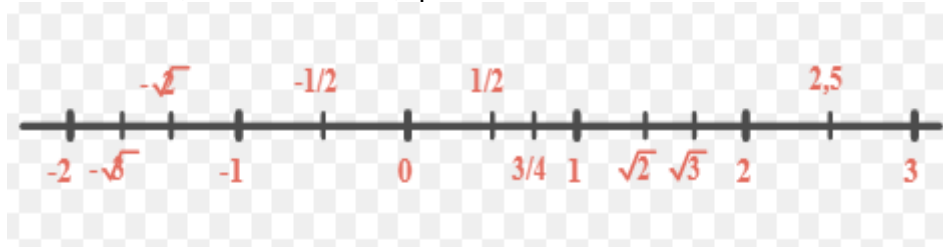


ConceptoDefinición

“El conjunto formado por todos los números racionales y todos los irracionales se llama **conjunto de los números reales**, y se designa con la letra **$\mathbb{R}$** ”

Recta numérica

Al representar los números racionales y los irracionales, es decir, los reales en la recta numérica, ésta se completa y se denomina recta real. Puede establecerse la siguiente correspondencia: “a cada número real, le corresponde un punto de la recta y a cada punto de la recta, un número real, que es su abscisa”.



OPERACIONES EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Adición y sustracción.

Para números naturales:

“La suma de números naturales, es otro número natural”

La suma es la unión de las cantidades representadas por los valores absolutos de los números dados, en cambio la sustracción es la diferencia entre el número de mayor valor absoluto y el de menor valor absoluto.

$$a + b = |a| + |b| = c$$

Para números enteros:

“La suma o resta de números enteros, es otro número entero”



- la suma de dos números de igual signo es un número del mismo signo que se obtiene sumando los valores absolutos y escribiendo el signo de ambos números, es decir, en caso de que sean ambos positivos la suma será un número positivo, en el caso de que ambos sean negativos la suma será un número negativo.

$$4 + 16 = 20 \quad (-4) + (-16) = -20$$

- Ahora bien en el caso de que sean de diferente signo se realiza la resta entre ambos y el signo le corresponde al de mayor valor absoluto.

$$-10 + 8 = -2 \quad 40 + (-30) = 10$$



Suma algebraica: en caso de existir una combinación de suma entre números de diferentes signos.

Para números racionales:

Para números racionales:

“La suma o resta de números racionales, es otro número racional”



- En el caso de fracciones de igual denominador, se suman o restan los numeradores, respetando el mismo denominador.

$$\frac{6}{7} + \frac{5}{7} - \frac{9}{7} = \frac{6+5-9}{7} = -\frac{3}{7}$$

- En el caso de ser de distinto denominador, podemos proceder encontrando un común denominador, y fracciones equivalentes.

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{12+5+30}{20} = \frac{47}{20} \quad \frac{9}{4} - \frac{2}{3} = \frac{27-8}{12} = \frac{19}{12}$$

Multiplicación y división:

“La multiplicación y división de números reales es otro número real”



- Multiplicación o división de números de igual signo, producto o cociente POSITIVO.
- Multiplicación o división de números de distinto signo, producto o cociente NEGATIVO.

Resolvemos algunos ejemplos:

$$a) 4 \cdot (-3) = -12 \quad b) 6 \cdot 8 = 48 \quad c) (-120) \cdot 3 = -360 \quad d) (-40) \cdot (-30) = 1200$$

En el caso de ser números racionales

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad \text{para la división: } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\text{Ejemplos: } \frac{4}{6} \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{28}{18} \quad \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{45}$$

Potenciación y radicación de números enteros.

 Concepto Definición	“Si a es un número real y n un número natural mayor que 1, la potencia a^n es el producto de n factores iguales a la base a, es decir: $a^n = a \cdot a \cdot a \dots a$ (n factores)”
---	---

Ejemplo: $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$ $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$

Producto de potencias de igual base	“El producto de potencias de la misma base es otra potencia que tiene la misma base y, como exponente, la suma de los exponentes” $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
--	--

Cociente de potencias de igual base	“El cociente de potencias de la misma base es otra potencia que tiene la misma base, y por exponente la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor” $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
--	--

Potencia de potencia	“La potencia de una potencia es otra potencia que tiene la misma base y por exponente el producto de los exponentes” $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
-------------------------------------	---

Distributiva de la potencia con respecto al producto y el cociente	“La potenciación es distributiva con respecto a la multiplicación y división” $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad \wedge \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
---	--

	En general $(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$
---	--



Radicación:



ConceptoDefinición

Si a es un número no negativo y n un número natural mayor que 1, la raíz n -ésima de a es el número positivo b que, elevado a la n -ésima potencia, da por resultado el número a :

$$\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow b^n = a \text{ (si } a \geq 0 \text{ y } b \geq 0).$$

Si a es un número negativo y n un número natural impar; la raíz n -ésima de a es el número negativo b que, elevado a la n -ésima potencia, da por resultado a :

$$\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow b^n = a \text{ (si } a < 0 \text{ y } b < 0 \text{ y } n \text{ impar)}.$$

Si a es un número negativo y n un natural par, la raíz n -ésima de a no existe.

Potencia de exponente fraccionario:

Una potencia de exponente fraccionario es igual a un radical donde el **denominador** de la fracción es el **índice del radical**; y el **numerador** de la fracción es el **exponente del radicando**.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

Es válida solo en el caso en que el radicando sea positivo.

Al poder expresar una raíz, como una potencia, esta última cumple con las mismas propiedades de la potenciación.

Notación científica

Los exponentes enteros con frecuencia se utilizan para escribir números muy grandes o muy pequeños de una forma conveniente.



ConceptoDefinición

Cualquier número real positivo puede escribirse en la forma

$$a \times 10^n$$

Donde $1 \leq a < 10$ y n es un entero. Decimos que un número escrito así está en *notación científica*.

Por ejemplo,

$$1.230.000 = 1,23 \times 10^6$$

$$0,0000000537 = 5,37 \times 10^{-8}$$



Logaritmos



ConceptoDefinición

El logaritmo en base a dada (positiva y distinta de 1) de un número b , positivo y distinto de cero, denominado argumento del logaritmo, es el exponente c al que hay que elevar a a para que resulte igual a b .
En símbolos:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Por ejemplo, la pregunta *¿a qué exponente se debe elevar 2 para obtener 16?*, equivale a la expresión $\log_2 16$. La respuesta es 4 ya que $2^4 = 16$.



¿A qué exponente se debe elevar 3 para obtener 1/9?

La operación matemática y su resultado son los siguientes:

$$\log_3 \frac{1}{9} = c \Rightarrow 3^c = \frac{1}{9} \Rightarrow 3^c = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow 3^c = 3^{-2} \Rightarrow c = -2 \Rightarrow \log_3 \frac{1}{9} = c$$

Casos particulares:



- El logaritmo de la base es 1, es decir: $\log_a a = 1$ pues $a^1 = a$.
- El logaritmo de 1 en cualquier base es cero, es decir: $\log_a 1 = 0$ pues $a^0 = 1$.

Las siguientes propiedades son útiles en la resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

Propiedades de los
logaritmos

Para cualquier par de números reales positivos M y N :

1. $\log_b(MN) = \log_b M + \log_b N$
2. $\log_b \left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$
3. $\log_b(N^c) = c \log_b N$, para cualquier número real c
4. $\log_b M = \frac{\log_c M}{\log_c b}$, para un número real c positivo y distinto de 1

TRABAJO PRÁCTICO N°1

Ejercicio N°1: Calcular las siguientes sumas algebraicas.

$$a) 13 - 10 + 6 - 12 + 3 = \quad b) 60 + 10 - 150 + 40 - 30 = \quad c) 18 + 21 - 34 + 12 =$$

Ejercicio N°2: Calcular los siguientes productos y cocientes.

$$a) 5 \cdot (-3) = \quad b) (-2) \cdot (-7) = \quad c) (-6) \cdot 8 = \quad d) (-5) \cdot (-4) = \quad e) (-957) \cdot 0 = \quad f) 18 : (-6) =$$

Ejercicio N°3: Clasificar los siguientes números racionales según su expresión decimal.

$$a) \frac{10}{9} \quad b) \frac{2}{15} \quad c) \frac{5}{21} \quad d) \frac{37}{10}$$

Ejercicio N°4: Expresar cada uno de los siguientes números decimales como fracción.

$$a) 4,77 \quad b) 1,234 \quad c) 83,56 \quad d) 3,9 \quad e) 4,77.... \quad f) 83,5666.... \quad g) 3,999...$$

Ejercicio N°5: Calcular las potencias y raíces.

$$a) 9^2 \quad b) (-2)^3 \quad c) -10^3 \quad d) (-2)^4 \quad e) \left(-\frac{3}{7}\right)^2 \quad f) \left(\frac{4}{9}\right)^0 \quad g) (-0,1)^4 \quad h) 0,05^3 \quad i) \left(\frac{7}{2}\right)^{-2}$$

$$j) \sqrt{49} \quad k) \sqrt[3]{216} \quad l) \sqrt{\frac{49}{100}} \quad m) \sqrt[3]{-\frac{1}{64}} \quad n) \sqrt[5]{-0,00032} \quad o) \sqrt{0,000081} \quad p) \sqrt{25^{-1}}$$

Ejercicio N°5: Escribir como una única potencia, aplicando propiedades.

$$a) 2^3 \cdot 2^0 \cdot 2^2 = \quad b) (8^5 : 8^2) \cdot 8 = \quad c) (4^6)^3 : (4^8)^2 : 4^2 = \quad d) 3^4 : (3^{17} : 3^2)^0 =$$

$$e) \left(\frac{5}{3}\right)^{-4} : \left(\frac{5}{3}\right)^{-6} = \quad f) \left(\left(\frac{2}{7}\right)^6\right)^3 : \left(\left(\frac{2}{7}\right)^8\right)^2 : \left(\frac{2}{7}\right)^2 =$$

Ejercicio N°6: Separar en términos y resolver los siguientes ejercicios combinados.

$$a) \sqrt{25 \cdot 36} : 78^0 - 30 = \quad b) (5 + 3)^2 \cdot (\sqrt{36} - 4^0)^2 + 4 \cdot 2 \cdot 5 =$$

$$c) \sqrt[3]{49 \cdot 3 - 8^0} \cdot (6 + 4) + 4^2 \cdot 3^3 = \quad d) \sqrt[5]{4 \cdot 2^3} \cdot (7 + 3 \cdot 5^0) - 2^3 =$$

$$e) \sqrt{\frac{36}{25}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{3}{5}\right) : \frac{3}{4} = \quad f) \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2} + 2\right)} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \quad g) \left(\frac{3}{2}\right)^3 : \frac{15}{4} + \sqrt[3]{2 + \frac{11}{8}} - \frac{1}{6} =$$

$$i) \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \sqrt{\frac{9}{4}} + \frac{27}{25} : \left(-\frac{9}{5}\right) - \frac{7}{15} = \quad j) \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{4}{3} - \frac{20}{21} \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) \cdot \left(-\frac{7}{12}\right) + (-2)^{-1} =$$

Ejercicio N°7: Expresar cada uno de los números decimales como fracción y opera.

$$a) 0,34 \cdot 2 + 3,03 - \frac{2}{9} \cdot 5 = \quad b) 1,02 : \frac{2}{3} - 2,7 \cdot (-0,6) = \quad c) (0,2)^2 : 0,2 + \frac{1}{9} \cdot (0,03)^3$$

Ejercicio N°8: Notación científica.

1- Escribir los siguientes números en notación científica.

$$a) 45300000000000 \quad b) 120100000000000000 \quad c) 0,00000000067$$

2- Pasar los números a notación científica y luego realizar los cálculos.

$$a) 1200000 \cdot 450000 \quad b) (0,0000000034 \cdot 0,00001)^2$$

3- Expresar en notación científica y calcular el valor de cada expresión.

$$a) \frac{a \cdot b}{2 \cdot c \cdot d} \text{ donde } \begin{cases} a = 6200000 \\ b = 0,00000000126 \\ c = 310000000 \\ d = 0,0000000000063 \end{cases} \quad b) \frac{a \cdot b \cdot c}{d} \text{ donde } \begin{cases} a = 5900 \\ b = 0,0004 \\ c = 0,02 \\ d = 20000 \end{cases}$$

Ejercicio N°9: Racionalizar los siguientes denominadores, según corresponda.

$$a) \frac{-4}{\sqrt[5]{7}} \quad b) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} + 2} \quad c) \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{6}} \quad d) \frac{8}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \quad e) \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$$

Ejercicio N°10:

1. Calcular, aplicando definición, los siguientes logaritmos.

$$a) \log_4 64 = \quad b) \log_2 32 = \quad c) \log_3 \left(\frac{1}{3}\right) =$$

$$\log 0,001 = \quad e) \log_4 2 = \quad f) \log_{81} 3 = \quad g) \log_{\frac{1}{2}} 128 = \quad h) \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{27}{8}\right) =$$

2. Sabiendo que $\log_a x = 4$ y $\log_a y = 6$ calcular aplicando propiedades

$$a) \log_a \frac{x}{y} \quad b) \lg_a x \cdot y \quad c) \lg_a y^3 \quad d) \lg_a \sqrt{x} \quad e) \lg_a x^2 \cdot \sqrt{y} \quad f) \log_a \frac{\sqrt{x}}{y^3}$$

3. Resolver aplicando propiedades.

$$a) \log_2 (8 \cdot \sqrt{2}) \quad b) \log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{27}} \quad c) \log_4 \sqrt[3]{\frac{1}{4} \cdot \sqrt{2}} \quad d) \log 10 \cdot \left(\frac{1}{100} \cdot \sqrt[3]{0,1}\right)^2$$

4. Sabiendo que $\log A = 2$, $\log B = 3$ y $\log C = 4$ calcular:

$$a) x = \log(A \cdot B^2) \quad b) x = \log \sqrt{\frac{B}{C^3}} \quad c) x = \log \left(\frac{B^3}{\sqrt{A}} \cdot C \right)$$

Ejercicio N°11:

1- Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado.

$$a) \quad 2x + 28 = 10 - x \quad b) 4x - 3 = x + 15: 3 \quad c) 74 - 2,5x = 5x - 1$$

$$d) 4x + 3 - x + 2x = -8 + 6 \quad e) 3 \cdot (2x + 4) = 4 \cdot (1 - x)$$

$$f) -(x - 1) + (x + 1) = -x + 1$$

$$g) \frac{1}{2}x - \left(-\frac{1}{3}\right) + 5x = \frac{1}{3}x - 2 \quad h) 6x - 2 \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 4x - \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$i) 3x - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = -x + \frac{3}{5} \quad j) (3x - 1) \cdot \frac{1}{2} - (-x + 2) = 5 \cdot (2x + 1)$$

2- Resuelvan las siguientes ecuaciones.

$$a) 8 \cdot x^2 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{33}{4} \quad b) 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}x} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \quad c) \sqrt{\frac{1}{2}x + 1} - 5 = -6$$

$$d) \sqrt{3x - \frac{1}{2}} = -2 \quad e) 9 \cdot x^2 + \sqrt{\frac{4}{9}} - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{67}{6}$$

3- Determinar la solución de las siguientes ecuaciones exponenciales.

$$a) 3^x = 27 \quad b) 2^{x+2} = 16 \quad c) (2^{x+1})^2 = 64 \quad d) 2^{x+1} + 2^{x-1} = 20 \quad e) 10^{3-x} = 1$$

$$f) 4^{x+1} + 2^{x+3} = 320 \quad g) 2^{2x} + 4^{x-1} + 44 = 2^{2x+2} \quad h) 5^x + 5^{2x-2} - 25^{x-1} = 5^{2x-3}$$

4- Encuentre la solución de las ecuaciones logarítmicas.

$$a) \log x + \log 20 = 3 \quad b) \log(x+1) = \log(x-1) + 3 \quad c) \log(x+1) - \log x = 1$$

$$d) 2\log x - \log(x-6) = 0 \quad e) \log(4x-1) - \log(x-2) = \log 5$$



Anexo
Sistema de los números reales

Síntesis Teórica

Adición y multiplicación

“El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ junto con las operaciones de adición y multiplicación se llama **sistema de números reales**. Las reglas básicas del álgebra para este sistema nos permiten expresar hechos matemáticos en formas simples y concisas, y resolver ecuaciones para encontrar respuestas a preguntas matemáticas.”

Las propiedades básicas del sistema de números reales con respecto a las operaciones de la adición y la multiplicación están en una lista en el siguiente recuadro, donde a , b y c representan números reales.

<u>Adición</u>	<u>Multiplicación</u>
1. Ley de composición interna i. $a + b$ es un número real 2. Ley asociativa i. $a + (b + c) = (a + b) + c$ 3. Ley conmutativa i. $a + b = b + a$ 4. Existencia de neutro El número real 0 es llamado elemento neutro, ya que para todo número real a: i. $a + 0 = a = 0 + a$ 5. Existencia de inverso Para todo número real a, existe un único número real (llamado opuesto, o inverso aditivo de a), representado por $-a$, tal que i. $a + (-a) = 0 = (-a) + a$	1. Ley de composición interna ii. ab es un número real 2. Ley asociativa ii. $a(bc) = (ab)c$ 3. Ley conmutativa ii. $ab = ba$ 4. Existencia de neutro El número real 1 es llamado identidad multiplicativa, ya que para todo número real a: ii. $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ 5. Existencia de recíproco Para todo número real $a \neq 0$, existe un único número real (llamado recíproco o inverso multiplicativo de a), representado por $1/a$, de tal forma que ii. $a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a$
6. Propiedad distributiva del producto respecto a la suma: i. $a(b + c) = ab + ac$ ii. $(a + b)c = ac + bc$	

Muchas propiedades adicionales pueden derivarse de las básicas como en el caso de las siguientes propiedades:

7. Ley cancelativa i. Si $a + c = b + c$, entonces $a = b$ ii. Si $ac = bc$ y $c \neq 0$ entonces $a = b$



8. Ley de la multiplicación por 0

- i. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
- ii. Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$ (o ambas)

Es posible definir las operaciones de sustracción y división en términos de la adición y de la multiplicación, respectivamente.

Para los números reales a y b , la *diferencia*, $a - b$ se define como

$$a - b = a + (-b).$$

Si $b \neq 0$, entonces el *cociente*, $a \div b$ se define como

$$a \div b = a \left(\frac{1}{b} \right) = \left(\frac{a}{b} \right)$$

A continuación presentamos una lista de las propiedades importantes de la sustracción, relacionadas con negativos y fraccionarios:

9. Propiedades de la sustracción y de los negativos

- i. $-(-a) = a$
- ii. $-(ab) = (-a)b = a(-b)$
- iii. $-a = (-1)a$
- iv. $(-a)(-b) = ab$

Para todas las fracciones a/b y c/d , donde $b \neq 0$ y $d \neq 0$:

10. Fracciones equivalentes

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ Si y solo si } ad = bc$$

11. Regla de los signos

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

12. Cancelativa o de la simplificación

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}, c \neq 0$$

13. Adición y sustracción con común denominador

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

14. Adición y sustracción con distintos denominadores

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

15. Multiplicación

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

16. División

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

17. División de 0 y división por 0

- i. $0 \div b = \frac{0}{b}, b \neq 0$
- ii. $0 \div 0 = \frac{0}{0}$ es indefinido
- iii. $a \div 0 = \frac{a}{0}$ es indefinido, $a \neq 0$



NÚMEROS COMPLEJOS



¿Qué sucede si desea encontrar la raíz cuadrada de -16 ?

Se plantearía la siguiente situación:

$$\sqrt{-16} = x \Leftrightarrow -16 = x^2$$

Pero resulta que el cuadrado de un número real nunca es negativo, por lo tanto este problema no tiene solución en $\mathbb{R}$.

“Con el fin de dar solución a planteos de este tipo se crean nuevos entes: los **números imaginarios**. La unidad para estos números es $i = \sqrt{-1}$.”

Entonces, para resolver el problema anterior se podría proceder de la siguiente manera:

$$\sqrt{-16} = x \Leftrightarrow \sqrt{16(-1)} = x \Leftrightarrow \sqrt{16}\sqrt{-1} = x \Leftrightarrow 4i = x$$

El resultado no corresponde a un número real, sino al número imaginario $4i$ (cuatro veces la unidad imaginaria i).



ConceptoDefinición

Con los **números reales** y los **números imaginarios** se compone un nuevo campo numérico llamado **Números Complejos**. Sus elementos son de la forma

$$\underbrace{a}_{\text{real}} + \underbrace{bi}_{\text{imaginario}}$$

Donde a y b son números reales y se denominan parte o componente real y parte o componente imaginaria, respectivamente.

En caso de que $a = 0$, el número complejo es un imaginario puro, y si $b = 0$, el número complejo es un real puro.

La suma y producto entre números complejo se definen de manera tal que siguen siendo válidas las operaciones y propiedades en $\mathbb{R}$.

	Universidad Nacional de Misiones Facultad de Ciencias Económicas	
---	---	---

Adición

La suma de dos números complejos es otro complejo cuya componente real es la suma de las componentes reales consideradas y su componente imaginaria es la suma de las componentes imaginarias de los complejos dados. Simbólicamente,

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Como se indico anteriormente, la suma de complejos verifica las mismas propiedades que la suma de números reales.

Multiplicación

Para realizar el producto de números complejos se puede utilizar la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma. Por ejemplo,

$$(2 - 7i) \cdot (1 + 3i) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3i + (-7i) \cdot 1 + (-7i) \cdot (3i) = 2 + 6i - 7i + (-21i^2)$$

Pero $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$, por lo tanto se tendría

$(2 - 7i) \cdot (1 + 3i) = 2 - i + (-21)(-1) = 2 - i + 21 = 23 - i$ Tal resultado es otro número complejo.

El producto se podría formalizar en la siguiente expresión:

$$(a + bi) * (c + di) = (a * c - b * d) + (a * d + b * c)i$$

Nuevamente se tiene que el producto cumple con las propiedades que verifica en $\mathbb{R}$, respetando también la propiedad distributiva con respecto a la suma.



UNIDAD 2: POLINOMIOS Y FUNCIONES POLINOMIALES

POLINOMIOS EN UNA VARIABLE

Las expresiones algebraicas que utilizaremos son los **polinomios en una variable**, simbólicamente: $P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots + a_n \cdot x^n$ donde $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ son números reales llamados coeficientes de cada término y x es la variable, el exponente es un número natural que indica el grado del término.

Ejemplo:

$$P(x) = 3x^5 - x^3 + 2$$

- $P(x)$ es un polinomio que tiene tres términos, y se lo denomina trinomio.
- $P(x)$ es un polinomio de grado 5.
- 3 es el coeficiente del término de grado 5.
- (-1) es el coeficiente del término de grado 3.
- 2 es el término de grado 0.

Ejercicio N°1:

Escribir cada polinomio con los exponentes de "x" en forma descendente, determinar el grado de cada uno de los polinomios e indicar los coeficientes de cada uno de los términos

- a) $P(x) = 2x^7 + 6x - 4x^2 - \frac{3}{4}x^6$
- b) $Q(x) = -3 + 5x^3 + x^4 - 7x + 11x^2$



OPERACIONES ENTRE POLINOMIOS

Adición de polinomios

La suma de dos polinomios es otro polinomio cuyos términos se obtienen sumando los términos de igual grado, llamados términos semejantes.

Ejemplo:

Dados $P(x) = \frac{1}{2}x^3 - 6x^2 - 1$ y $Q(x) = 4x^2 + 3x + 5$ hallar $P(x) + Q(x)$

$$P(x) + Q(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 3x + 4$$

Ejercicio N°2:

Efectuar las operaciones indicadas:

- a) $(3x^2 + 4x - 3) + (2x^2 - 3x - 1) - (x^2 + x + 7)$
b) $(3y^2 - 2y + 4) + [(2y^2 - 3y + 2) - (y^2 + 4y + 3)]$

Producto de polinomios

El producto de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene multiplicando todos los términos del primero por todos los términos del segundo, y luego sumando todos los términos semejantes.

Dados $P(x) = \frac{1}{2}x^3 - 6x^2 - 1$ y $Q(x) = x - 1$ hallar $P(x) \cdot Q(x)$, aplicamos la propiedad distributiva y el producto de potencias de igual base.

$$P(x) \cdot Q(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 6x^3 + 6x^2 - x + 1 = \frac{1}{2}x^4 - \frac{13}{2}x^3 + 6x^2 - x + 1$$

Ejercicio N°3:

Determinar los productos de los polinomios indicados:

- a) $P(x) = (x - 2)$ $Q(x) = (x + 2)$
b) $P(x) = (x^{-2} + y)$ $Q(x) = (x^2 + y^{-2})$
c) $P(x) = (x - y)$ $Q(x) = (x^2 + xy + y^2)$
d) $P(x) = (x^n + y^n)$ $Q(x) = (x^n + y^{-n})$

**-Cociente de un polinomio por un monomio:**

El cociente de un polinomio por un monomio es otro polinomio que se obtiene dividiendo todos los términos del polinomio dividendo por el monomio divisor, aplicamos la propiedad distributiva y el cociente de potencias de igual grado

Ejemplo:

Dados $P(x) = 2x^2 - 6x^2 - 10x$ y $Q(x) = 2x$ hallar $P(x) \div Q(x)$

$$P(x) \div Q(x) = x - 3x - 5$$

Ejercicio N°4:

Determinar el cociente entre el polinomio $P(x)$ y $Q(x)$

a) $P(x) = 4x^3 + 3xy^5 - 12xy$ $Q(x) = (3x^2y^3)$

b) $P(x) = (12a^9b - 10a^3b^5)$ $Q(x) = (2a^2b)$

Cociente entre polinomios:

Para que la división entre dos polinomios sea posible, el grado del polinomio dividendo debe ser mayor o igual que el grado del polinomio divisor, aplicamos el algoritmo de Euclides.

$$P(x) \div Q(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

$P(x)$: Polinomio dividendo.

$Q(x)$: Polinomio divisor.

$C(x)$: Polinomio cociente

$R(x)$: Polinomio resto de la división.

Aclaración: El polinomio dividendo debe estar completo y ordenado y el polinomio divisor solo debe estar ordenado.

Ejercicio N°5:

.Determinar el cociente entre el polinomio $P(x)$ y $Q(x)$

a) $P(x) = 6x^3 - 11x^2 - x - 2$ $Q(x) = (3x - 2)$

b) $P(x) = 8x^3 + 1$ $Q(x) = (2x + 1)$

c) $P(x) = 6x^3 - 11x^2 - x - 2$ $Q(x) = (3x - 2)$

d) $P(x) = -17x^2 + 5x + x^4 + 2$ $Q(x) = (x^2 - 1 + 4x)$



Regla de Ruffini

Las divisiones en las cuales el dividendo es un polinomio completo en x , y el divisor es de la forma $(x \pm a)$, pueden resolverse aplicando la Regla de Ruffini

Ejemplo:

Dados $P(x) = 6x^2 + 2x + 7$ y $Q(x) = x - 2$ hallar $P(x) \div Q(x)$

El polinomio cociente $C(x) = 6x + 14$

Polinomio resto $R(x) = 35$

Ejercicio N°6:

Determinar el cociente entre el polinomio $P(x)$ y $Q(x)$, aplicando la regla de Ruffini

- a) $P(x) = 3x^3 + 2x^4 + 7$ $Q(x) = x + 2$
- b) $P(x) = x^5 - 1$ $Q(x) = x + 1$
- c) $P(x) = x^2 - 4$ $Q(x) = x + 2$

Teorema del resto:

El resto de la división de un polinomio por otro de la forma $(x + a)$ es el valor numérico del polinomio dividendo, para $x = -a$.

Ejemplo:

Hallar el resto de la división entre $P(x) = (x^2 - x^4 + 7x + 1)$ y $Q(x) = (x - 2)$

$$R(x) = 2^2 - (2)^4 + 7 \cdot (2) + 1 = 3$$

$$R(x) = 3$$

Ejercicio N°7:

Hallar el resto de la división entre los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$

- a) $P(x) = x^5 - 4x$ y $Q(x) = x + 1$
- b) $P(x) = x^2 - 2x + 4$ y $Q(x) = x - 2$

**Teorema del factor**

Dado $P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots + a_n \cdot x^n$, $(x - a)$ es factor de $P(x)$ si y solo si, $P(a) = 0$

Ejemplo:

1. Dado el polinomio $P(x) = x^2 - 4$, ¿es el polinomio $Q(x) = x + 2$ factor del polinomio $P(x)$?

Aplicamos el teorema del resto, y obtenemos $P(-2) = (-2)^2 - 4 = 0$, por lo tanto $Q(x)$ es factor de $P(x)$.

2. Factorar $P(x)$

Aplicamos la regla de Ruffini y tenemos que $P(x) = x^2 - 4 = (x - 2) \cdot (x + 2)$

Ejercicio N°8:

Dado el polinomio $P(x) = x^2 + 18x + 9$

- a) ¿Es $Q(x) = x + 3$ factor de $P(x)$? b) Factorar $P(x)$

Ejercicio N°9:

Dado el polinomio $P(x) = x^3 - 8$

- a) ¿Es $Q(x) = x - 2$ factor de $P(x)$? b) Factorar $P(x)$.

Cuadrado de un binomio: $(x + a)^2 = x^2 + 2x + a^2$

Cubo de un binomio: $(x + a)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot a + 3xa^2 + a^3$

Resolver cuadrados y cubos de los binomios dados:

- a) $(2x - 3)^2 =$ b) $(y - 2a)^3 =$ c) $(3x + 4y)^2 =$ d) $(3x + 4y)^3 =$



FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS EN UNA Y DOS VARIABLES

-factor común

$$-10x^2 + 6x^3 + 22x^7 = 2x^2(-5 + 3x + 11x^5)$$

-Factor común en grupos

$$\begin{aligned}x^2 + yx + 2x + 2y &= (x^2 + yx) + (2x + 2y) \\&= x(x + y) + 2(x + y) \\&= (x + 2) \cdot (x + y)\end{aligned}$$

-Diferencia de cuadrados

$$x^2 - 4y^2 = (x - 2y) \cdot (x + 2y)$$

-Suma y diferencia de dos potencias de igual grado

$$x^3 + y^3 = (x + y) \cdot (x^2 - x \cdot y + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y) \cdot (x^2 + x \cdot y + y^2)$$

-Trinomio Cuadrado

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3) \cdot (x - 4)$$

Ejercicio N°10:

Factorizar los siguientes polinomios.

a) $27x^3y^3z^3 + 81x^4y^5z^2 - 90x^2y^3z^7 =$

b) $12a^6b^4c^2 + 15a^2b^4c^6 =$

c) $2x^4 - 98 =$

d) $xy + 2y + 4x + 8 =$

e) $8y^8 - 512 =$

f) $-x^2 - 3x + 28 =$

g) $-3x^2 - 9x - 6 =$

h) $y^2 - 121 =$

i) $ac + bc + 3a + 3b =$

j) $x^3 + 27 =$

k) $2x^4 + 4x^3 - 6x^2 =$

RESOLUCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Ejemplo: Hallar la solución de la ecuación

$x^3 - 4x = 0$, factorizamos el lado izquierdo de la igualdad

$$x(x^2 - 4) = x \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$$

Aplicamos el

Teorema del factor cero: Si el producto de dos o más números es igual a cero, cuando menos uno de esos números debe ser igual a cero.

$$x = 0 \quad o \quad x - 2 = 0 \quad o \quad x + 2 = 0$$

$$x = 2 \quad x = -2$$

Solución de la ecuación: $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$

Ejercicio N°11:

Resolver las ecuaciones e indicar el conjunto solución

- a) $x^3 - x = 0$
- b) $3x^6 - 27x^4 = 0$
- c) $x^2 - 20 = -4$
- d) $2x^3 - 200 = 0$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Ejercicio N°12:

Determinar el dominio de la expresión racional

a) $\frac{3x+2}{x^2-7x+12}$

b) $\frac{2x+1}{x-1}$

c) $\frac{x-4}{x^2-25}$

Ejercicio N°13:

Simplificar las expresiones algebraicas

a) $\frac{3x+6y}{x+2y} =$ b) $\frac{x^2+3x+9}{x^3-27} =$ c) $\frac{2x-8}{x^2-16} =$

Ejercicio N°14:

Efectuar las operaciones entre las expresiones algebraicas indicadas:

a) $\frac{x^2-6x+9}{x} \cdot \frac{x^2}{x-3} =$

b) $\frac{x+6}{x^2-16} \cdot \frac{3x-12}{3x+18} =$

c) $\frac{x^2-4}{2b-bx} \div \frac{x^2+4x+4}{2b+bx} =$

d) $\frac{x^3+2x^2+4x+8}{a^2-1} \div \frac{x^4-16}{a+1} =$

e) $\frac{3x}{x-1} - \frac{2x^2+3x-2}{x^2-1} =$

f) $\frac{x-2}{x^2-3x} + \frac{2x-1}{x+3} - \frac{2}{x^2-9} =$

Ejercicio N°15:

Resolver las ecuaciones e indicar el conjunto solución

a) $\frac{x+2}{x+3} - 1 = \frac{1}{3-2x-x^2}$ b) $\frac{3x}{x^2+6+5x} + \frac{2-5x}{x^2-4} = \frac{2-3x}{x^2-6+x}$

c) $\frac{3x}{x^2+6+5x} + \frac{2-5x}{x^2-4} = \frac{2x}{x^2-6+x}$ d) $\frac{3}{x-2} + \frac{x^2}{(x+3)(x-2)} = \frac{x+4}{x^2-9}$

FUNCIONES POLINOMICAS

Definición de función

Una función $f: A \rightarrow B$ es una regla que a cada elemento del conjunto A le asigna un único elemento del conjunto B, siendo A y B conjuntos numéricos.

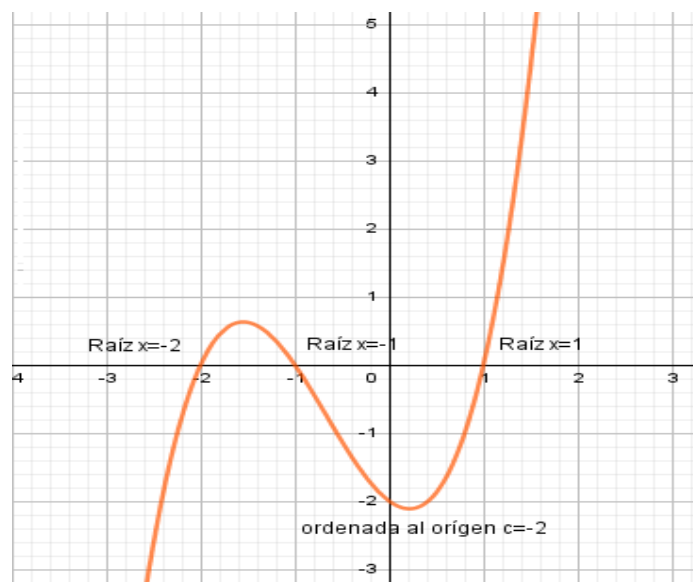
Las funciones se pueden presentar de diversas maneras, por medio de un gráfico, mediante una tabla de valores, por medio de una fórmula que relaciona la variable dependiente con la independiente.

El dominio de f es el conjunto de puntos para los que la función exista y la imagen es el conjunto de valores que alcanza f .

El conjunto de ceros de la función f es el conjunto de puntos sobre el que f vale cero, los ceros de f se visualizan como los puntos del dominio para los que el gráfico de f corta al eje "x"

Ejemplo: Dada la función f , indicar en el gráfico las raíces y la ordenada al origen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$



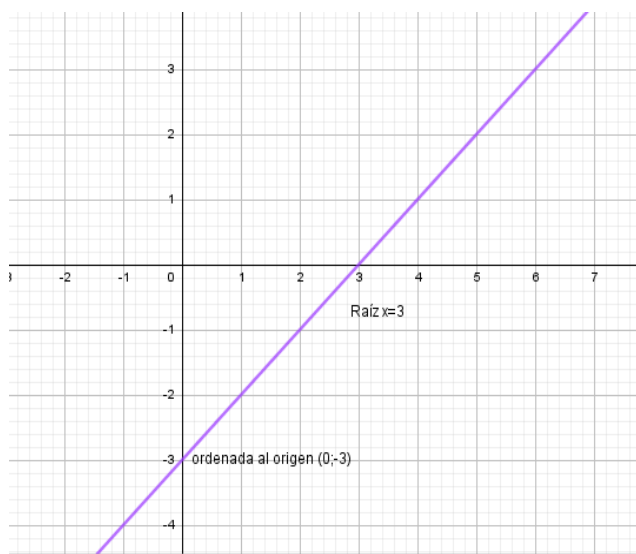


Función Lineal

La función $f: R \rightarrow R/f(x) = m \cdot x + b$, se conoce con el nombre de una función lineal, cuya gráfica es una línea recta, donde “ m ” es la pendiente o inclinación de la recta y “ b ” es la ordenada al origen (valor que toma la función cuando $x=0$).

Ejemplo: Dada la función lineal f , graficarla e indicar la raíz y la ordenada al origen.

$$f: R \rightarrow R/f(x) = x - 3$$



Ejercicio N°16:

Para cada función, determinar las raíz, ordenada al origen, analizar si es creciente o decreciente y graficarla

- a) $f: R \rightarrow R/f(x) = 3x - 4$
- b) $f: R \rightarrow R/f(x) = -2x + \frac{3}{2}$
- c) $f: R \rightarrow R/f(x) = \frac{4}{3}x - 1$



Función Cuadrática

La función $f: R \rightarrow R / f(x) = ax^2 + bx + c$ se conoce con el nombre de función cuadrática, y su gráfico es una parábola.

- El número “ a ”, recibe el nombre de coeficiente principal, da la concavidad, o sea la orientación de las ramas de la parábola. Si $a > 0$, las ramas están orientadas hacia arriba, y si $a < 0$ las ramas están orientadas hacia abajo.
- El número “ c ” es la ordenada al origen.

- Para obtener las raíces de la función cuadrática, hacemos $f(x) = 0$, en este caso tenemos $ax^2 + bx + c = 0$, ecuación que puede resolverse aplicando la resolvente

$x_{1-2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, donde a la expresión $b^2 - 4ac$ recibe el nombre de discriminante, de acuerdo al valor que toma la función tiene dos raíces, una raíz doble o ninguna.

- Si $b^2 - 4ac > 0$, tiene dos raíces reales distintas.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, no tiene raíces reales
- Si $b^2 - 4ac = 0$, tiene dos raíces iguales (una raíz doble).

- El vértice es el punto en el que la parábola tiene un máximo, si $a < 0$, o un mínimo si $a > 0$.

La abscisa del vértice puede determinarse haciendo $x_v = -\frac{b}{2a}$

Para determinar la ordenada del vértice, se calcula el valor que toma la función cuando $x = x_v$, $y_v = f(x_v)$

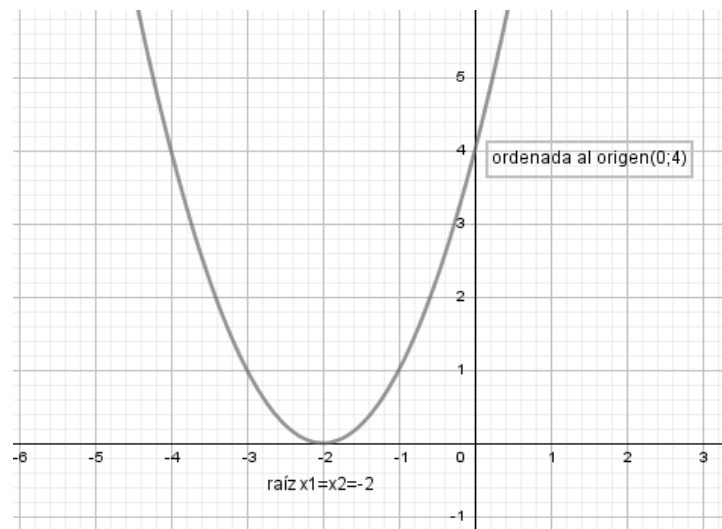
- El eje de simetría es la recta vertical que divide a la parábola en dos partes iguales, su ecuación es $x = x_v$
- Cuando una función cuadrática tiene raíces reales, puede escribirse en forma factorizada

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$



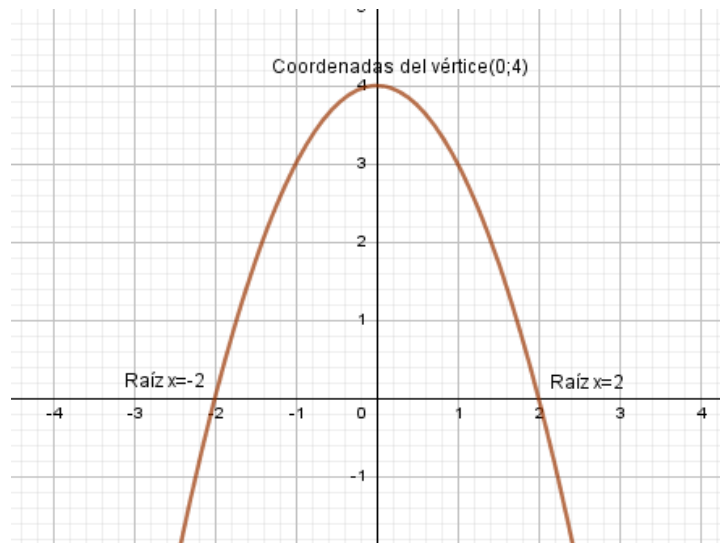
Ejemplo 1: Dada la función f , graficarla e indicar las raíces, ordenada al origen y coordenadas del vértice.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^2 + 4x + 4$$



Ejemplo 2: Dada la función g , graficarla e indicar las raíces, ordenada al origen y coordenadas del vértice.

$$g: R \rightarrow R/g(x) = -x^2 + 4$$



Ejercicio N°17:

Para cada función, determinar las raíces, coordenadas del vértice, ordenada al origen, ecuación del eje de simetría y graficarla.

- a) $f: R \rightarrow R/f(x) = -x^2 - x + 2$
- b) $f: R \rightarrow R/f(x) = x^2 - 4x + 5$
- c) $f: R \rightarrow R/f(x) = x^2 - 9$
- d) $f: R \rightarrow R/f(x) = -x^2 + 3x$

Ejercicio N°18:

- a) Graficar la parábola cuyas raíces son $x_1 = 2$, $x_2 = -4$ y que $f(-1) = 3$
- b) Escribir la función en forma factorizada.
- c) ¿Cuáles son las coordenadas del vértice?
- d) ¿Cuál es la ordenada al origen?

UNIDAD N°3

ANALISIS DE RELACIONES NUMÉRICAS Y FUNCIONALES

En esta unidad trabajaremos fundamentalmente en la resolución de situaciones problemáticas utilizando todas aquellas herramientas matemáticas disponibles.

Para resolver el trabajo práctico es conveniente que tenga en cuenta las siguientes indicaciones:

Entender el problema. Analiza los enunciados, identifica los datos y las incógnitas. Muchas veces le ayudará realizar un gráfico, introducir una notación conveniente, o dividir el problema en partes.

Comparar lo dado con lo que debe demostrar. Piense si ya has resuelto un ejercicio semejante.

Elaborar un plan y ejecutarlo. Éste es el paso más difícil, debe encontrar el camino que lo lleve a la solución. Traducir el problema a una ecuación.

Corroborar cada paso que de partiendo de una hipótesis para llegar a la tesis.

Encontrar la respuesta y comprobarla. Siempre mire hacia atrás.

Esta sucesión de indicaciones, llevadas a cabo en forma ordenada, pueden ayudarte a resolver ejercicios y problemas.

Si no puede realizar algún ejercicio o tiene dudas, concorra al horario de consulta de la Cátedra.
--



PORCENTAJES, BONIFICACIONES, RECARGOS

(Soluciona los problemas de tanto por ciento)

PORCENTAJES:

Dadas dos cantidades, "X" e "Y", se llama porcentaje de "X" con respecto a "Y", al cociente X/Y multiplicado por 100.

$$x\% = \frac{X}{Y} * 100$$

Ejemplo: ¿Qué porcentaje es 600 de 12.000?

$$\text{Porcentaje: } x\% = \frac{600}{12000} * 100 = 5\%$$

CALCULO DEL TANTO PORCIENTO:

Despejando de la fórmula de porcentaje "X" nos queda: $X = \frac{x\% * Y}{100}$

Ejemplo: Calcular el 10 % de 328.000.

$$X = \frac{328000 * 10}{100} = 32800$$

BONIFICACIÓN:

Se denomina bonificación o rebaja a un cierto porcentaje que se deduce de una determinada cantidad.

Ejemplo: Calcular cuánto debe abonarse por una venta de \$ 280.000.- que tiene una bonificación del 4 %.

$$X = \frac{280000 * 4}{100} = \$11200 \text{ (bonificación)}$$

Importe a abonarse: $\$280000 - \$11200 = \$268800$

RECARGO:

Es un porcentaje que se le suma a una determinada cantidad.

Ejemplo: Una compra de \$ 82.000.- sufre un recargo del 7 %, calcular cual es el precio que debe abonarse por la compra del producto.

$$X = \frac{\$82000 * 7}{100} = \$5740 \text{ (recarga)}$$

Precio total a abonarse: \$82000 + \$5740 = \$87740

Ejercicio N°1: En la vidriera de un negocio se lee lo siguiente: Descuento por cambio de temporada: 8% y por pago en efectivo 12%. ¿Cuál es el porcentaje real de descuento?

Ejercicio N°2: En un centro comercial hay tres farmacias; en la primera se ofrece el descuento del 10% y luego del 30%, en la segunda se ofrece el descuento del 20% y luego el 20% y en la tercera se ofrece el descuento del 30% y luego del 10%. ¿En cuál de las tres farmacias el descuento es mayor?

Ejercicio N°3: Por la compra de un terreno incluido el 10% de comisión del rematador se abona \$325000. ¿Cuál es el precio del terrero?

Ejercicio N°4: Un anuncio dice que se puede comprar una bicicleta en cuotas pagando inicialmente \$ 1500, siendo este el 24% del precio. ¿Cuánto cuesta la bicicleta?

Ejercicio N°5: Un edificio tiene 50 departamentos, se venden el 8%, y de los restantes se alquilan el 50%. ¿Cuántos departamentos libres quedan?

Ejercicio N°6: Para comprar artículos de limpieza para una PYME a crédito se debe pagar el 30% de cuota inicial. Si la cuota inicial es de \$3450-, ¿cuál es el valor de la mercancía comprada por cuotas?

	Universidad Nacional de Misiones Facultad de Ciencias Económicas	
---	---	---

Ejercicio N°7: En un examen de ingreso a la facultad han aprobado el 38% de los 850 inscriptos. a) ¿A qué cifra alcanzan los alumnos que han reprobado el examen? b) Se sabe además que en el examen recuperatorio aprobaron el 25% de los que estaban en situación de recuperar ¿Cuántos alumnos aprobaron el recuperatorio y cuantos no? c) ¿Cuántos alumnos ingresaron a la facultad y cuantos no?

Ejercicio N°8: Por la compra de una Tablet una persona debe entregar el 20% del valor y el saldo en 6 cuotas fijas de \$560. a) Calcular el valor de la compra. b) Calcular el valor de la entrega.

Ejercicio N°9: Julio desea comprarse una moto que cuesta \$215.000, cuando decide realizar la compra el valor del vehículo asciende a \$225.750. a) ¿Qué porcentaje representa la suba del mismo? b) Si para realizar la compra debe entregar el 60% y el saldo en 24 cuotas, calcular el plan de pagos a realizar.

INTERES: SIMPLE Y COMPUESTO

El interés es el beneficio que obtiene una de las partes por haber prestado un capital. Se clasifica en: simple y compuesto.

INTERES SIMPLE: El interés simple se calcula siempre sobre el capital, los intereses no generan nuevos intereses. El monto es la suma del capital más el interés devengado hasta el final del plazo estipulado.

$I = C \cdot i \cdot n$ (Para aplicar esta fórmula, las unidades del tiempo y de la tasa deben estar unificadas a la unidad de la tasa)

Monto a interés simple: Es el capital más los intereses devengados

$$M = C + I \quad \text{o} \quad M = C(1 + i \cdot n)$$

Las distintas variables se pueden despejar de la fórmula de interés:

$$C = \frac{I}{i \cdot n}, \quad i = \frac{I}{C \cdot n}, \quad n = \frac{I}{C \cdot i}$$

Ejemplos:

1) El banco "G" otorga un préstamo al Sr Pérez de \$5000 al 24% anual por el lapso de 18 meses: Calcular el interés generado con: a) tasa anual, b) tasa mensual.

$$C = \$5.000$$

$$i = 0,24 \text{ anual.}$$

$$t = 18 \text{ meses.}$$

Cálculos auxiliares:

Sincronización de tasa y tiempo:

a) Anual:

$$i = 0,24 \text{ anual} \quad n = \frac{18}{12} \text{ años}$$

b) De anual a mensual:

$$i = 0,24 \text{ anual} \quad i = \frac{0,24}{12} \rightarrow i = 0,02 \text{ mensual} \quad n = 18 \text{ meses}$$

Resolución

a) Tasa anual:

$$I = C \cdot i \cdot n \rightarrow I = 5000 \cdot 0,24 \cdot \frac{18}{12} = 1800$$

b) Tasa Mensual:

$$I = C \cdot i \cdot n \rightarrow I = 5000 \cdot 0,02 \cdot 18 = 1800$$

2) Juan abre una cuenta bancaria el 15 de febrero depositando \$ 1.800 al 7% anual. Si retira \$ 700 el 7 de octubre, calcular: ¿Cuánto retira el 23 de diciembre del mismo año?

Datos:

$$C_1 = 1800 \quad C_2 = 700 \quad n_1 = 234 \text{ días} \quad n_2 = 77 \text{ días} \quad i = 0,07 \text{ a}$$

$$I_1 = C_1 \cdot i \cdot n_1 = 1800 \cdot 0,07 \cdot \frac{234}{365} = 80,77808219$$

$$I_2 = (C_1 - C_2) \cdot i \cdot n_2 = (1800 - 700) \cdot 0,07 \cdot \frac{77}{365} = 16,243835$$

$$M = C_1 + C_2 + I_1 + I_2 = 1800 + (-700) + 80,77808 + 16,2438 = 1197,021918$$

INTERES COMPUESTO: El interés compuesto es una convención por la cual el interés simple se incorpora al capital al final de cada período para generar nuevos intereses.

Monto a interés compuesto: Cuando se multiplica un capital por el factor de capitalización, se lo desplaza en el tiempo “n” períodos hacia adelante y su valor es el resultado del producto.

Simbólicamente:

$C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$ (Para aplicar esta fórmula, las unidades del tiempo y de la tasa deben estar unificadas a la unidad de la tasa)

Las distintas variables se pueden despejar de la fórmula de monto:

$$I = C_0[(1 + i)^n - 1]$$

$$I = C_n - C_0$$

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1$$

$$n = \frac{\log(\frac{C_n}{C_0})}{\log(1+i)}$$

Ejemplos:

1) Se depositaron \$ 35.000 en un banco que paga una tasa del 0,09 anual ¿Cuánto se retira luego de 24 meses del depósito?

Desarrollo

$C_n = 35000 \cdot (1 + 0,09)^2 = \$41583,5$. Es el monto que retira luego de 24 meses del depósito.

2) El 8/3 se depositaron \$1800 en una institución que abona el 12% anual, el 10/6 se depositan \$1500, y el 8/8 se vuelven a depositar \$2800. ¿De cuánto dinero se dispone el 30/12 del mismo año? ¿Y cuál fue el interés generado?

Datos: $i = 0,12 \text{ anual}$ $C_1 = \$1800$ $C_2 = \$1500$ $C_3 = \$2800$

Desarrollo:

$$C_{n1} = 1800 \cdot (1 + 0,12)^{94/365} + 1500 = 3353,31$$

$$C_{n2} = 3353,31 \cdot (1 + 0,12)^{60/365} + 2800 = 6216,31$$

$$C_{n3} = 6216,31 \cdot (1 + 0,12)^{143/365} = 6498,59$$

Lo que significa que al 30/12 dispongo de \$6498,59

Luego:

$$I = C_{n3} - C_3 - C_2 - C_1$$

$$I = 6498,59 - 2800 - 1500 - 1800 = \$398,59$$

Es decir, que el interés que se produjo en el periodo que estuvo depositado el capital es de \$398,59

Ejercicio N°10: Calcula: a) el interés producido por \$ 18.500 colocados al 6,5 % semestral durante 10 meses; b) el monto originado en dicho periodo de tiempo.

Ejercicio N°11: Si una persona recibe \$ 2.800 de rédito por haber depositado su capital 6 meses en una entidad que abona el 24% anual con régimen simple. a) Calcular el importe depositado. b) Determinar cuánto retira al cabo de los 6 meses.

Ejercicio N°12: ¿Cuántos meses permaneció depositado un capital de \$ 1.600 si arrojo un beneficio de \$200 al 25% anual?

Ejercicio N°13: a) ¿Cuál es la tasa de interés anual que hace que \$ 5.500 produzca un interés de \$ 50 en un semestre? b) Verifique el valor del monto utilizando la fórmula correspondiente y la tasa hallada.

Ejercicio N°14: Roberto compró una notebook para su trabajo a \$3750. Realizó una entrega de \$1500 y acordó pagar el saldo en 3 meses. Si debió pagar con un incremento de \$625, sabiendo que se aplicó interés directo, calcula la tasa: a) mensual y b) trimestral de interés que se aplicó.

Ejercicio N°15: ¿A cuánto ascienden el interés y el monto obtenidos luego de depositar \$ 200.000 en una institución bancaria que otorga 6% anual, durante 255 días?

Ejercicio N°16: Calcula cuantos trimestres deben transcurrir para que un capital de \$144.283 se transforme en \$378.200, si estuvo colocado al 5,5 % trimestral de interés.

Ejercicio N°17: Calcule la tasa semestral de interés que transforma \$177.000 en \$296.500 en 10 semestres.

Ejercicio N°18: El 8 de marzo se depositaron \$16.000 que recibirán anualmente un rédito del 10%. ¿Cuánto se retira el 30 de septiembre, si el 10 de junio se han retirado \$5.000 de la cuenta?

MAGNITUDES DIRECTA E INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Magnitudes directamente proporcionales: Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al crecer una, la otra crece en la misma proporción, y al decrecer la primera la segunda decrece en la misma proporción, se cumple que al multiplicar o dividir una de ellas por un número cualquiera, la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Magnitudes inversamente proporcionales: Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando al crecer una, la otra disminuye en la misma proporción, y al decrecer la primera la segunda aumenta en la misma proporción.

Ejercicio N°19: Analice las siguientes relaciones e Indicar cuáles son directamente proporcionales, cuáles son inversamente proporcionales y cuáles no mantienen relación de proporcionalidad.

- a) Cantidad de kilos de papas comprados y precio final pagado por la compra.
- b) Tiempo que tarda un coche en recorrer una distancia. (velocidad constante)
- c) Número de páginas de un libro y su precio.
- d) Cantidad de días que tarda un determinado número de obreros para levantar una pared.
- e) Volumen de un cuerpo y su peso.
- f) Peso de un bebé y su edad.

Ejercicio N°20: El precio de 200 grs. de chipitas de almidón es de \$45. a) ¿Cuánto costarán 500 grs? b) ¿Cuánto costará 1 kg?

Ejercicio N°21: Para embalar 5000 artículos de un cierto producto dos máquinas tardan 45 minutos, si se agrega una máquina nueva igual a las anteriores, ¿Cuántos tiempo tardarán las 3 para embalar la misma cantidad de artículos?

Ejercicios de Complementarios de Integración para seguir practicando, resuélvalos aplicando los conceptos necesarios.

Ejercicio N°1: Para realizar un viaje de estudios del último año de la escuela se contratará un colectivo que cuesta \$ 46000. El 45% del valor del viaje lo pagará la cooperadora de la escuela, 40% de lo que falta estará a cargo de los padres y para pagar el resto se organizará un evento deportivo.

- ¿Cuánto dinero aporta la cooperadora?
- ¿Qué porcentaje deben pagar los padres?
- ¿Cuánto dinero deberán recaudar en el evento deportivo?

Ejercicio N°2: Un vendedor de telas gana el 30% sobre cada producto que vende. (a) Si un producto A le costó \$560 ¿a cuánto debe venderlo? (b) Y si a otro producto B lo vendió a \$1800, ¿Cuál fue el precio de costo?

Ejercicio N°3: Juan y Lucía compraron un libro de Contabilidad al cursar la materia en el año 2017 que les costó \$520, Juan puso el 35% del valor y Lucía el resto. Al año siguiente lo vendieron por el 75% del valor original y se repartieron el dinero en las mismas proporciones de lo invertido. ¿Cuánto recibió Lucía?

Ejercicio N°4: Dos amigos están preparando una torta de cumpleaños. La receta indica que se deben utilizar 10 huevos por cada 2,5 kg de harina. ¿Cuántos huevos se deberán usar si harán una torta que insume 4 kg de harina?

Ejercicio N°5: Estime la cantidad kilos de basura que genera diariamente cada habitante en un país si se sabe que la producción total anual es de 15,5 millones de toneladas y que el total de habitantes es de 23 millones.

Ejercicio N°6: Un mayorista de muebles gana 25% sobre el costo de cada artículo que vende:

- Si un escritorio lo compró a \$2500 ¿A cuánto deberá venderlo?
- Si vendió una silla giratoria a \$3500 ¿cuál fue el precio de costo?

Ejercicio N°7: Si el precio de costo de un auto es de \$573.000 y la concesionaria lo vende a \$647.000 ¿cuál es la variación porcentual de aumento con respecto al costo?

Ejercicio N°8: La bodega “los Paraísos” paga a sus viajantes \$10 por botella de vino vendidos más una cantidad fija de \$500. La bodega “Las Conde” de la competencia paga \$15 por artículo y \$300 fijos. ¿Cuántas botellas debe vender el viajante de Las Conde para ganar más dinero que uno de los Paraísos?

Ejercicio N°9: Si invierte \$1500 en una cuenta bancaria que otorga 12% de interés compuesto anual, el monto a retirar dependerá del tiempo que deje el dinero depositado según la siguiente tabla:

Tiempo (años)	1	2		7	
Monto a retirar	1620		2643,51		3713.94

Nota: En la cifra del monto a retirar no se consideraron los decimales.

- Complete la tabla con los valores faltantes.
- Represente gráficamente la situación planteada en un sistema de coordenadas cartesianas. (Utilice una curva continua)
- Identifique las variables que se relacionan.
- Analice si el monto a retirar es directamente proporcional al tiempo. Justifique la respuesta.

Ejercicio N°10: Un banco paga 0,05 de interés simple por año. Calcule:

- ¿Cuánto dinero se retirará al cabo de 7 años si depositan \$15000?
- ¿Cuánto tiempo permaneció depositado el capital anteriormente nombrado si de interés se obtuvieron \$3750 al momento de la extracción?
- En el momento mencionado en ítems b) ¿cuál fue el monto retirado?

Ejercicio N°11: Un club cobra a los no-socios \$50 por el uso diario de la pileta más \$80 por el carnet sanitario mensual.

- Encontrar el costo de concurrir a la pileta un día, tres días y cinco días respectivamente para un mismo invitado. Vuelque la información en una tabla.
- Si Carla pagó \$580 ¿Cuántos días concurre a la pileta?
- ¿La situación planteada corresponde a magnitudes que se relacionan en forma directamente proporcional? Justifique su respuesta.

Ejercicio N°12: Candelaria se ubica en el sudoeste de la Provincia de Misiones a 23 kilómetros de la ciudad de Posadas. Otras de las ciudades cercanas son: Garupá a 16 kilómetros de distancia; Santa Ana a 22 kilómetros y San Ignacio a 36 kilómetros.

- a) Calcule cuánto tiempo tarda un ciclista para arribar a Candelaria desde esas localidades.
- b) Si el ciclista sale a las 06 AM ¿a qué hora llegará a Santa Ana?
- c) Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:
 - c.1) Si aumenta la distancia recorrida por el ciclista, aumenta el tiempo utilizado en recorrerla.
 - c.2) Si pedalea dos horas, entonces recorre 40 kilómetros.
 - c.3) La razón entre el tiempo y la distancia recorrida es constante.
 - c.4) Si se duplica el tiempo pedaleado, entonces se triplica la distancia recorrida.
 - c.5) Si se multiplica el tiempo por una constante positiva cualquiera, entonces la distancia recorrida correspondiente al nuevo tiempo resulta de multiplicar la distancia por la misma constante.
 - c.6) La relación entre las horas pedaleadas y la distancia recorrida es una función de proporcionalidad directa.
 - c.7) La constante de proporcionalidad es 15.

Ejercicio N°13: En un almacén de productos naturales se vende granola (alimento formado por nueces, copos de avena mezclados con miel y otros ingredientes naturales) a \$25 los 100 grs.

- a) ¿Cuánto cuesta la granola si se vende por un cuarto, medio kilo y tres cuartos de kilo?
- b) ¿Cuánta granola deberá pesar si un cliente compra \$ 40 del producto?
- c) Analice si la relación entre la cantidad vendida y el precio es de proporcionalidad directa o inversa. ¿Puede determinar la constante de proporcionalidad?

Si no puede realizar algún ejercicio o tiene dudas, concorra al horario de consulta de la Cátedra.