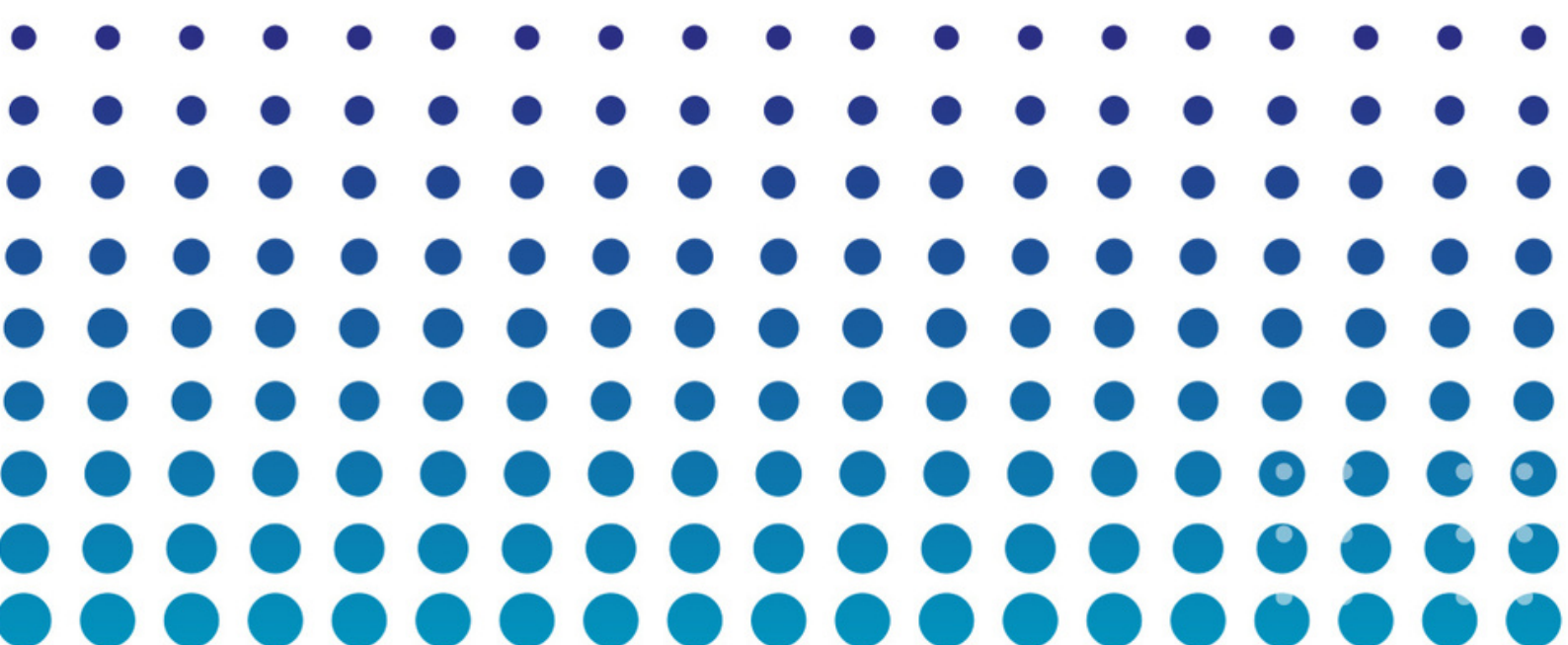




CICLO INTRODUCTORIO

Introducción a la Matemática

Carrera Contador Público



**UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE MISIONES**



**Facultad de
Ciencias
Económicas**

LENGUAJES MATEMÁTICOS-CONJUNTO NÚMERICO

En este módulo recordamos distintos lenguajes que se utilizan en diferentes situaciones matemáticas. Luego te encontrarás con los ya conocidos conjuntos numéricos y sus propiedades. También repasamos algunos sistemas de medición, sus relaciones y la notación científica con la que seguramente has trabajado en asignaturas como Física, Química y Biología.

Lenguajes Matemáticos

En Matemática se emplean distintos lenguajes:

- Coloquial**, es el que se utiliza para expresar una idea en forma oral o escrita.
- Simbólico**, es el que permite expresar con símbolos, en forma precisa las ideas dadas en lenguaje coloquial. Tiene la ventaja de ser sintético y claro para las demostraciones y razonamientos.
- Gráfico**, es el que ayuda a aclarar e interpretar algunos conceptos y situaciones.

Con el objetivo de utilizar los lenguajes utilizados en Matemática, iniciamos nuestro estudio con la definición de **conjunto**, considerado como cualquier colección de objetos o individuos.

Un conjunto está formado por elementos que cumplen ciertas propiedades.

En esta unidad estudiaremos conjuntos numéricos.

Cuando utilizamos el “**El lenguaje simbólico**” designamos a los conjuntos con letras mayúsculas, y a los elementos con letras minúsculas, y para simbolizar cuando un objeto es elemento de un conjunto, escribimos $a \in A$. Para simbolizar cuando un objeto no es elemento de un conjunto, escribimos $a \notin A$.

Los símbolos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ sirven para identificar los conjuntos numéricos

Conjunto de Números Naturales	$\mathbb{N}$
Conjunto de Números Enteros	$\mathbb{Z}$
Conjunto de Números Racionales	$\mathbb{Q}$
Conjunto de Números Irracionales	$\mathbb{I}$
Conjunto de Números Reales	$\mathbb{R}$

Un conjunto puede definirse por **extensión** listando todos los elementos del conjunto separándolos por comas y encerrando todo entre llaves.

Por **comprensión** enunciando una propiedad que cumplen sólo los elementos que lo forman.

Un conjunto vacío no posee elementos, se lo denota con el símbolo, $[\]$ o bien $\emptyset$.

Ejemplo 1: $B = \{1,3,5,7,9\}$

$$B = \{x/x \in \mathbb{N}, x \text{ es impar } 1 \leq x \leq 9\}$$

Ejemplo 2:

- a) El conjunto de los números naturales formado por todos los números naturales pares, mayores que 6.

En lenguaje simbólico es: $A = \{x/x \in \mathbb{N}, x = 2n \wedge x > 6\}$

El conjunto A tiene infinitos de elementos, por lo tanto, no se puede definir por extensión.

- b) El conjunto formado por los números Naturales, mayores que 2 y menores que 2
Este conjunto no tiene elementos y se simboliza $B = \{\}$

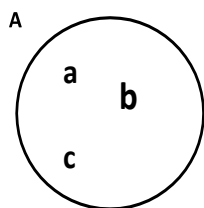
- c) El conjunto formado por números Naturales pares, menores o iguales que 10 y mayores o iguales que 1

Definimos por comprensión: $C = \{x/x \in \mathbb{N}, x = 2n \wedge 1 \leq x \leq 10\}$

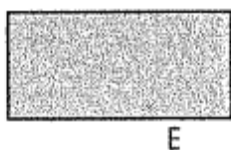
Definimos por extensión: $C = \{2,4,6,8,10\}$

En los ejemplos propuestos, hemos utilizado el lenguaje coloquial y el lenguaje simbólico, para identificar los conjuntos. Utilizaremos, además, el lenguaje grafico para representar un conjunto, mediante la utilización de diagramas de Venn.

Por ejemplo, al conjunto $A = \{a, b, c\}$ lo podemos representar con diagramas de Venn así:



Conjunto Referencial: Es el que tiene todos los elementos correspondientes a una situación dada. Se representa con la letra E y su diagrama es un rectángulo.



Inclusión de conjuntos: Un conjunto A está incluido en un conjunto B ($A \subseteq B$) si y solo si todos los elementos de A pertenecen a B . De manera simbólica

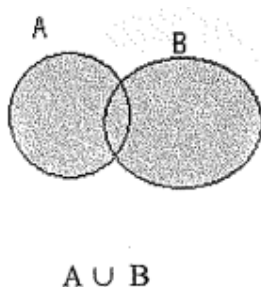
$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x: x \in A \Rightarrow x \in B$$

Al conjunto A se lo llama subconjunto de B

- El conjunto vacío se considera subconjunto de cualquier conjunto. $\forall A: \emptyset \subset A$
- Todo conjunto está incluido en sí mismo $\forall A: A \subseteq A$

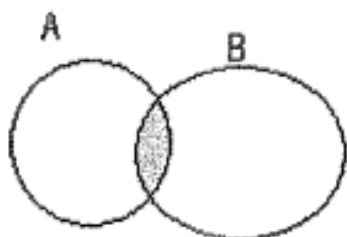
Unión de conjuntos: Dados los conjuntos A y B se llama unión, y se simboliza $A \cup B$, al conjunto formado por todos los elementos de ambos conjuntos.

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$



Intersección de conjuntos: Dados los conjuntos A y B se llama intersección, y se simboliza $A \cap B$, al conjunto formado por los elementos comunes a ambos conjuntos

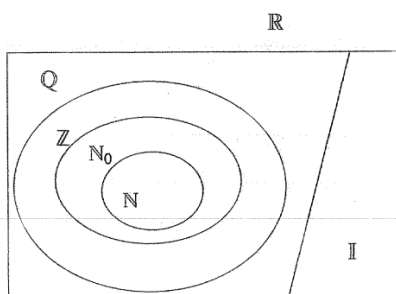
$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$



$A \cap B$

Conjunto	Notación	Otra notación	Descripción	Ejemplos	Representación decimal
Números Naturales	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}^+$	Números de conteo	1,2,3, ...	Decimales finitos
Números Naturales con el cero	$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{Z}_0^+$	Números naturales con el 0	0,1,2,3, ...	Decimales finitos
Números Enteros	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$	Números naturales, sus opuestos y el 0	..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...	Decimales finitos
Números Racionales	$\mathbb{Q}$	...	Números que se pueden escribir en la forma $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$	$-2, -\frac{1}{2}, -\frac{6}{7}$ -2,333 ... 17, 9,253737	Decimales finitos y periódicos
Números Irracionales	$\mathbb{I}$	...	Números que no se pueden escribir en la forma $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$	$\sqrt{2}, \pi,$ 1,717 ...	Decimales no periódicos
Números Reales	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$	Números racionales o irracionales	Todos los anteriores	Todos los decimales

En el siguiente Diagrama de Venn se muestran las relaciones entre los distintos conjuntos de números. En la gráfica se ha tratado de interpretar la relación de los conjuntos



Proposición

Se define como proposición o enunciado a una oración declarativa, carente de ambigüedad que es verdadera (**V**) o falsa (**F**), pero nunca las dos cosas simultáneamente. La veracidad o falsedad de un enunciado, se llama valor de verdad.

Si tenemos

$P(x)$: x es un número natural par

Observamos que de esta expresión no podemos decir que sea verdadera o falsa, lo que nos permite asegurar que no es una proposición. Pero si reemplazamos la variable x por un número obtendremos una proposición, que será verdadera o falsa según el valor reemplazante.

$P(4)$: 4 es un número natural par, es verdadera

$P(7)$: 7 es un número natural par, es falsa

A este tipo de expresiones, en las que existe una o más variables o indeterminadas que al ser reemplazadas por constantes se transforman en proposiciones, se las denomina esquemas proposicionales o funciones proposicionales.

Ejemplo 3: “Todos los números Naturales son positivos”

$P(x) = \text{Todos los números Naturales son positivos}$

$$V(P) = V$$

Cuantificadores

Los cuantificadores en lógica, y son frases que indican una cantidad, sea plural o singular sobre el sujeto incognito de una función proposicional (enunciado abierto) que cumple una propiedad determinada y se clasifican en **cuantificador universal** $\forall x$, y **cuantificador existencial** $\exists x$.

Ejemplo 4:

“Todos los números Naturales son positivos”

En símbolos: $\forall x \in \mathbb{N}: x \text{ es positivo}$

“Existe un número Natural que es par”

En símbolos: $\exists x \in \mathbb{N} / x \text{ es par}$

Negación de los cuantificadores

- $\sim[\forall x \in A: P(x)] \Leftrightarrow \exists x \in A / \sim P(x)$ Negación del cuantificador Universal.
- $\sim[\exists x \in A / P(x)] \Leftrightarrow \forall x \in A: \sim P(x)$

Ejemplo 5:

- “Todos los números enteros son impares”: en símbolos

$$\forall x \in \mathbb{Z}: x \text{ impar}$$

- “No todos los números enteros son impares”: en símbolos

$$\sim[\forall x \in \mathbb{Z}: x \text{ impar}] \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z} / x \text{ no es impar}$$

Podemos expresar en lenguaje coloquial: “Existen enteros que no son impares”

CONJUNTOS NUMÉRICOS

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

En nuestra vida cotidiana vemos números a cada momento, nos parece algo tan natural que nos cuesta imaginarnos un mundo sin ellos. Sin embargo, son una creación del hombre.

Los números aparecieron con la idea de agrupar objetos semejantes y representar esas cantidades con símbolos.

“Los números naturales permiten contar cuantos elementos hay en una colección, determinar qué posición ocupa un elemento en una lista e indicar que elemento es uno entre otros”.

Para referirse al conjunto de los números naturales, se usa el símbolo $\mathbb{N}$. También se suele escribir $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; \dots\}$, lo que se lee “ $\mathbb{N}$ es el conjunto formado por 1, 2, 3, 4 etcétera”. Si dos números son tales que uno es el sucesor del otro, como 3 y 4, entonces, se denominan consecutivos. Para expresar cualquier par de números consecutivos se usa n y $n + 1$.

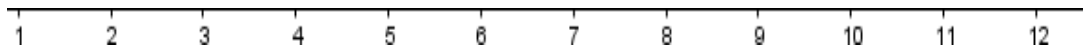


- El primer número natural es el uno y cada número natural tiene un sucesor o siguiente, que se obtiene sumándole 1.
- Entre dos números naturales consecutivos, no existe ningún número natural.

Recta numérica: una manera de representar gráficamente los números naturales es señalarlos en la recta numérica y esto puede hacerse tomando diferentes escalas.

En una recta se marca el 0, que es el origen desde donde se empieza a contar; la unidad

es la distancia uniforme que separa dos números naturales consecutivos y la flecha indica el orden creciente.



EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

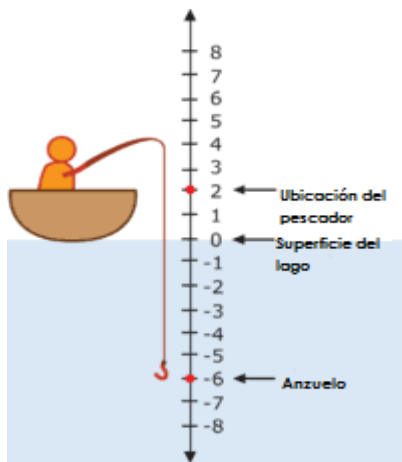
En la gran mayoría de las situaciones de la vida real en las que se usan números para registrar cantidades de objetos, se utilizan números naturales. Sin embargo, en algunos casos, además de registrar una cantidad o un orden, es necesario indicar su relación con respecto a una referencia que se toma como cero.

Los números con signo $+$ o $-$ indican transformaciones de una cantidad o comparaciones entre cantidades.

“El conjunto de los números enteros está formado por los números naturales, o enteros positivos, el cero y los números enteros negativos”

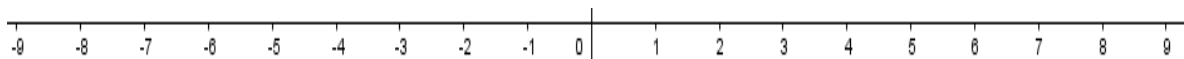
Para referirse a todos los números enteros, se usa $\mathbb{Z}$, o sea

$$\mathbb{Z} = \{\dots -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4 \dots\}$$



Considerando la imagen, podemos evidenciar una aplicación de los números enteros, donde el nivel de la superficie del agua representa al cero, las unidades que se encuentran por debajo de la superficie son representadas por números con un signo menos delante (negativos) y los números que están representando alturas por sobre la superficie del agua son positivos (naturales)

Recta numérica: si la semirrecta que se utiliza para representar a los números naturales se extiende en el sentido opuesto, se puede representar a los números enteros.



ConceptoDefinición

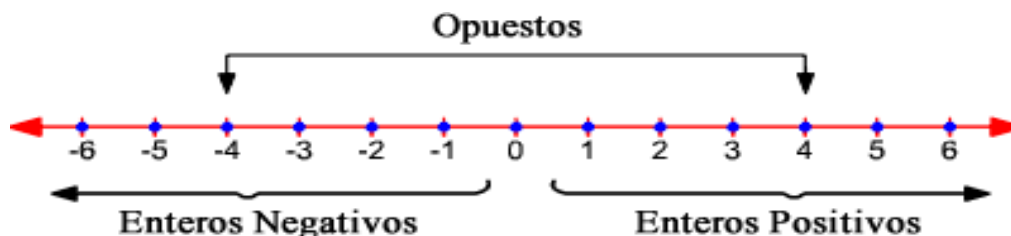
“Se llama **módulo de un número entero** a la distancia de ese número al cero y se anota colocando el número entre barras. Por ejemplo:

$$|-5| = 5 \text{ y } |5| = 5$$



ConceptoDefinición

“Los números que tienen el mismo valor absoluto, o sea la misma distancia a 0, pero de distinto signo, se llaman **opuestos**. El opuesto de 0 es 0.”



Orden en $\mathbb{Z}$



- Si dos números son positivos, el mayor es el que tiene mayor valor absoluto, es decir, el que está más lejos del 0.
- Todo número positivo es mayor que cero.
- Todo número positivo es mayor que otro negativo.
- El cero es mayor que cualquier número negativo.
- Si dos números son negativos, el mayor es que tiene menor valor absoluto, es decir, el que está más cerca del 0.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES



ConceptoDefinición

“Un número racional es una expresión del tipo $\frac{a}{b}$ donde a y b son números enteros y b es distinto de cero. El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ está formado por todas las fracciones (positivas y negativas) y el cero”

Todo número racional se puede escribir en forma de fracción o de expresión decimal. Para encontrar la expresión decimal de una fracción se divide el numerador por el denominador.



- Cuando el cociente entre dos números enteros no es exacto, se puede expresar como un número fraccionario.
- Los números fraccionarios se pueden escribir también en forma decimal $\frac{1}{2} = 0,5$, $\frac{3}{4} = 0,75$, $\frac{5}{2} = 2,5$
- Las fracciones que se pueden transformar en fracciones decimales expresan números decimales exactos.
- Las fracciones que no se pueden transformar en fracciones decimales expresan decimales periódicos.

Reglas de transformación:

Para transformar una fracción decimal en un número decimal, escribimos el numerador y “corremos” la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros haya en el denominador.

$$\frac{12}{10} = 1,2 \quad \frac{74}{10000} = 0,0074$$

Para transformar un número decimal exacto en una fracción decimal, escribimos en el numerador todas las cifras sin la coma y, en el denominador, el 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales haya en el número dado

$$1,25 = \frac{125}{100} \quad 0,014 = \frac{14}{1000}$$

Para transformar una expresión periódica a fracción el numerador se obtiene restando el número sin la coma ni el periodo menos la parte no periódica, el denominador está formado por tantos nueves como cifras periódicas tenga.

$$2,\widehat{3} = \frac{23 - 2}{9} = \frac{21}{9} \quad 13,\widehat{25} = \frac{1325 - 13}{99} = \frac{1312}{99}$$

Para obtener fracciones equivalentes se pueden seguir dos caminos:



- Se multiplica el numerador y el denominador por un mismo número entero (distinto de cero). A este procedimiento se denomina amplificación.
- Se divide el numerador y el denominador por un número que sea divisor de los dos. A este procedimiento se lo denomina simplificación.

Una fracción es decimal cuando el denominador está formado por el 1 seguido de ceros.

Una fracción es irreducible cuando el máximo común divisor entre el numerador y el denominador es 1, es decir, no se puede simplificar.

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Todo número racional tiene una expresión decimal, exacta o periódica; para obtenerla basta dividir el numerador por el denominador, ahora bien:



ConceptoDefinición

“Aquellos números que tienen expresiones decimales infinitas y no periódicas se llaman **irracionales**, estos números no pueden escribirse como fracción de dos enteros. $\sqrt{2} = 1,14142135624 \dots$, la cual al conjunto de esos números lo denotaremos con la letra $\mathbb{I}$ ”

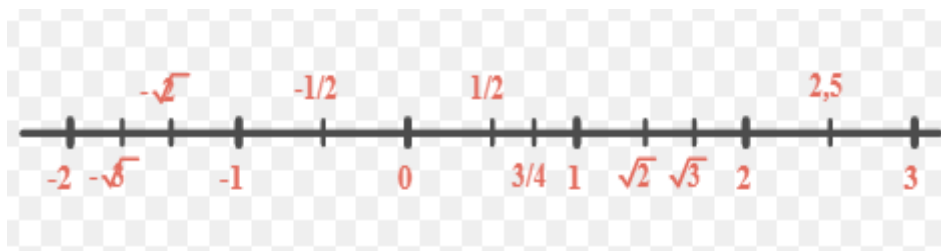


ConceptoDefinición

“El conjunto formado por todos los números racionales y todos los irracionales se llama **conjunto de los números reales**, y se designa con la letra $\mathbb{R}$ ”

Recta numérica

Al representar los números racionales y los irracionales, es decir, los reales en la recta numérica, ésta se completa y se denomina recta real. Puede establecerse la siguiente correspondencia: “a cada número real, le corresponde un punto de la recta y a cada punto de la recta, un número real, que es su abscisa”.



OPERACIONES EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

Adición y sustracción.

Para números naturales:

“La suma de números naturales, es otro número natural”

La suma es la unión de las cantidades representadas por los valores absolutos de

los números dados, en cambio la sustracción es la diferencia entre el número de mayor valor absoluto y el de menor valor absoluto.

$$a + b = |a| + |b| = c$$

Para números enteros

“La suma o resta de números enteros, es otro número entero”



- la suma de dos números de igual signo es un número del mismo signo que se obtiene sumando los valores absolutos y escribiendo el signo de ambos números, es decir, en caso de que sean ambos positivos la suma será un número positivo, en el caso de que ambos sean negativos la suma será un número negativo.

$$4 + 16 = 20 \quad (-4) + (-16) = -20$$

- Ahora bien, en el caso de que sean de diferente signo se realiza la resta entre ambos y el signo le corresponde al de mayor valor absoluto.

$$-10 + 8 = -2 \quad 40 + (-30) = 10$$

Suma algebraica: en caso de existir una combinación de suma entre números de diferentes signos.

Para números racionales:

Para números racionales:

“La suma o resta de números racionales, es otro número racional”



- En el caso de fracciones de igual denominador, se suman o restan los numeradores, respetando el mismo denominador.

$$\frac{6}{7} + \frac{5}{7} - \frac{9}{7} = \frac{6 + 5 - 9}{7} = \frac{2}{7}$$

- En el caso de ser de distinto denominador, podemos proceder encontrando un común denominador, y fracciones equivalentes.

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{12 + 5 + 30}{20} = \frac{47}{20} \quad \frac{9}{4} - \frac{2}{3} = \frac{27 - 8}{12} = \frac{19}{12}$$

Multiplicación y división:

“La multiplicación y división de números reales es otro número real”

Resolver algunos ejemplos:

a) $4 \cdot (-3) = -12$ b) $6 \cdot 8 = 48$ c) $(-120) \cdot 3 = -360$ d) $(-40) \cdot (-30) = 1200$



- Multiplicación o división de números de igual signo, producto o cociente POSITIVO.
- Multiplicación o división de números de distinto signo, producto o cociente NEGATIVO.

En el caso de ser números racionales

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ para la división $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Potenciación y radicación de números enteros



Concepto Definición

*“Si a es un número real y n un número natural mayor que 1, la potencia a^n es el producto de n factores iguales a la base a , es decir:
 $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n factores)”*

Ejemplo:

$$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}$$

Producto

de potencias de igual base

“El producto de potencias de la misma base es otra potencia que tiene la misma base y, como exponente, la suma de los exponentes”

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Cociente

de potencias de igual base

“El cociente de potencias de la misma base es otra potencia que tiene la misma base, y por exponente la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor”

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Potencia de potencia “La potencia de una potencia es otra potencia que tiene la misma base y por exponente el producto de los exponentes”
 $(a^n)^m = a^{n.m}$

Distributiva de la potencia con respecto al producto y el cociente “La potenciación es distributiva con respecto a la multiplicación y división”
 $(a.b)^m = a^m.b^m \quad \wedge \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$



En general

$$(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$$

Radicación



Si a es un número no negativo y n un número natural mayor que 1, la raíz enésima de a es el número positivo b que, elevado a la enésima potencia, da por resultado el número a :

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \text{ (si } a \geq 0 \text{ y } b \geq 0)$$

Si a es un número negativo y n un número natural impar; la raíz enésima de a es el número negativo b que, elevado a la enésima potencia, da por resultado a :

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \text{ (si } a < 0 \text{ y } b < 0 \text{ y } n \text{ impar)}$$

Si a es un número negativo y n un natural par, la raíz enésima de a no existe.

Potencia de exponente fraccionario

 ConceptoDefinición	Una potencia de exponente fraccionario es igual a un radical donde el denominador de la fracción es el índice del radical; y el numerador de la fracción es el exponente del radicando. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ Es valida solo en el caso en que el radicando sea positivo.
--	---

Al poder expresar una raíz, cómo una potencia, está ultima cumple con las mismas propiedades de la potenciación.

Racionalización de denominadores: Es el procedimiento que nos permite escribir expresiones equivalentes sin utilizar raíces en el denominador. Consideremos dos casos:

- El denominador sea un único término con raíz de la forma $\sqrt[n]{a^p}$ en cuyo caso se multiplica numerador y denominador por la misma raíz de índice n, la misma base a y un nuevo exponente m tal que $m + p = n$.

Ejemplo 5;

$$\frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{(1 + \sqrt{3})} \cdot \frac{(1 - \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3} - (\sqrt{3})^2}{1^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3} - 3}{1 - 3} = \frac{-\sqrt{3} + 3}{2}$$

Sistema de los números reales

Adición y multiplicación

“El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ junto con las operaciones de adición y multiplicación se llama **sistema de números reales**. Las reglas básicas del álgebra para este sistema nos permiten expresar hechos matemáticos en formas simples y concisas, y resolver ecuaciones para encontrar respuestas a preguntas matemáticas.”

Las propiedades básicas del sistema de números reales con respecto a las operaciones de la adición y la multiplicación están en una lista en el siguiente recuadro, donde a , b y c representan números reales.

<u>Adición</u>	<u>Multiplicación</u>
- Ley de composición interna $a + b$ es un número real - Ley asociativa	- Ley de composición interna ab es un número real - Ley asociativa

i. $a + (b + c) = (a + b) + c$ 3. Ley conmutativa i. $a + b = b + a$ 4. Existencia de neutro El número real 0 es llamado elemento neutro, ya que para todo número real a: i. $a + 0 = a = 0 + a$ 5. Existencia de inverso Para todo número real a, existe un único número real (llamado opuesto, o inverso aditivo de a), representado por $-a$, tal que i. $a + (-a) = 0 = (-a) + a$	ii. $a(bc) = (ab)c$ 3. Ley conmutativa ii. $ab = ba$ 4. Existencia de neutro El número real 1 es llamado identidad multiplicativa, ya que para todo número real a: ii. $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ 5. Existencia de recíproco Para todo número real $a \neq 0$, existe un único número real (llamado recíproco o inverso multiplicativo de a), representado por $1/a$, de tal forma que ii. $a \cdot \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \cdot a$
6. Propiedad distributiva del producto respecto a la suma: i. $a(b + c) = ab + ac$ ii. $(a + b)c = ac + bc$	

Muchas propiedades adicionales pueden derivarse de las básicas como en el caso de las siguientes propiedades

7. Ley cancelativa i. Si $a + c = b + c$ entonces $a = b$ ii. Si $ac = bc$ entonces $a = c$ 8. Ley de la multiplicación por 0 i. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ ii. Si $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0 \vee b = 0$ (o ambas)
--

Es posible definir las operaciones de sustracción y división en términos de la adición y de la multiplicación, respectivamente.

Para los números reales a y b , la *diferencia*, $a - b$ se define como

$$a - b = a + (-b)$$

Si $b \neq 0$, entonces el cociente $a : b$ se define como

$$a:b = a \cdot \left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b}$$

A continuación, presentamos una lista de las propiedades importantes de la sustracción, relacionadas con negativos y fraccionarios:

9. Propiedades de la sustracción y de los negativos

- i. $-(-a) = a$
- ii. $-(ab) = (-a)b = a(-b)$
- iii. $-a = (-1)a$
- iv. $(-a)(-b) = ab$

Para todas las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, donde $b \neq 0$ y $d \neq 0$

10. Fracciones equivalentes

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

11. Regla de los signos

$$-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

12. Cancelativa o de la simplificación

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}, c \neq 0$$

13. Adición y sustracción con denominador común

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

14. Adición y sustracción con distinto denominador

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{b \cdot d}$$

15. Multiplicación

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

16. División

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

17. División de 0 y división por 0

- i. $0 : b = \frac{0}{b} = 0, b \neq 0$
- ii. $0 : 0 = \frac{0}{0}$ es indefinido
- iii. $a : 0 = \frac{a}{0}, a \neq 0$ es indefinido

Trabajo Practico N°1

Ejercicio N° 1: Coloca los signos $\in$, $\notin$, $\subset$, que correspondan

$$\begin{array}{ccccc} 2 \dots \mathbb{N} & 0,5 \dots \mathbb{N} & -1 \dots \mathbb{Z}^+ & -1 \dots \mathbb{Z}^- & 0 \dots \mathbb{N} \\ \mathbb{N} \dots \mathbb{Z} & \mathbb{N} \dots \mathbb{Z}^+ & \mathbb{Q} \dots \mathbb{R} & & \end{array}$$

Ejercicio N° 2: Sean los conjuntos $A = \{2,5,6\}$; $B = \{1,2,3,4,5\}$; $C = \{1,3,4\}$ efectúa las siguientes operaciones y confecciona los diagramas de Venn correspondiente.

$$\begin{array}{cc} A \cup B & A \cup C \\ A \cap C & B \cap C \end{array}$$

Ejercicio N° 3: Determina cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones

- | | |
|----------------------------|-------------------------------|
| a- $2^5 - 5$ | d- El empresario es eficiente |
| b- $2^5 - 5 = 27$ | e- x es azul |
| c- El eficiente empresario | f- ¡Siéntate! |

Ejercicio N° 4: Indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones

p : En misiones no se planta tabaco
 s : Misiones exporta yerba mate

Ejemplo N° 5:

- a) Dada la expresión en lenguaje simbólico, pasar al lenguaje coloquial

Lenguaje simbólico	Lenguaje coloquial
$3x + 2$	El triple de un número más dos
$x^2 - 3$	El cuadrado de un número disminuido tres unidades
$\frac{x+1}{2}$	La mitad del siguiente de un número.

- b) Dada la expresión en lenguaje coloquial, pasar al lenguaje simbólico.

Lenguaje coloquial	
La suma de dos números consecutivos	$x + (x + 1)$
El duplo del cuadrado de un número disminuido en 2	$2x^2 - 2$
La quinta parte del triple del cuadrado de un número	$\frac{1}{5}(3x^2)$

Ejercicio N° 6: Calcular las siguientes sumas algebraicas.

- a) $13 - 10 + 6 - 12 + 3 =$
 b) $60 + 10 - 150 + 40 - 30 =$
 c) $18 + 21 - 34 + 12 =$

Ejercicio N° 7: Calcular los siguientes productos y cocientes

- a) $5 \cdot (-3) =$ d) $(-5) \cdot (-4) =$
 b) $(-2) \cdot (-7) =$ e) $(-957) \cdot 0 =$
 c) $(-6) \cdot 8 =$ f) $18 : (-6) =$

Ejercicio N° 8: Expresar cada uno de los siguientes números decimales como fracción

- a) 4,77
 b) 1,234
 c) 83,56
 d) 3,9
 e) 4,77...
 f) 83,5666...
 g) 3,999...

Ejercicio N° 9: Calcular las potencias y raíces

- a) $9^2 =$ e) $\left(-\frac{3}{7}\right)^2 =$ i) $\left(\frac{7}{2}\right)^{-2} =$ m) $\sqrt[3]{-\frac{1}{64}} =$
 b) $(-2)^3 =$ f) $\left(\frac{4}{9}\right)^0 =$ j) $\sqrt{49} =$ n) $\sqrt[5]{-0,00032} =$
 c) $-10^3 =$ g) $(-0,1)^4 =$ k) $\sqrt[3]{216} =$ o) $\sqrt{0,000081} =$

$$d) (-2)^4 = \quad h) 0,05^3 = \quad l) \sqrt{\frac{49}{100}} = \quad p) \sqrt{25^{-1}} =$$

Ejercicio N° 10: Escribir como una única potencia, aplicando propiedades

$$\begin{aligned} a) 2^3 \cdot 2^0 \cdot 2^2 = & \quad b) (8^5 : 8^2) \cdot 8 = & \quad c) (4^6)^3 : (4^8)^2 : 4^2 = \\ d) 3^4 : (3^{17} : 3^2)^0 = & \quad e) \left(\frac{5}{3}\right)^{-4} : \left(\frac{5}{3}\right)^{-6} = & \quad f) \left(\left(\frac{2}{7}\right)^6\right)^3 : \left(\left(\frac{2}{7}\right)^8\right)^2 : \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \end{aligned}$$

Ejercicio N° 11: Separar en términos y resolver los siguientes ejercicios combinados

$$\begin{aligned} a) \sqrt{25 \cdot 36} : 78^0 - 30 = & \\ b) (5 + 3)^2 \cdot (\sqrt{36} - 4)^2 + 4 \cdot 2 \cdot 5 = & \\ c) \sqrt{49} \cdot 3 - 8^0 \cdot (6 + 4) + 4^2 \cdot 3^3 = & \\ d) \sqrt[5]{4 \cdot 2^3} \cdot (7 + 3 \cdot 5^0) - 2^3 = & \\ e) \sqrt{\frac{36}{25}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{3}{5}\right) : \frac{3}{4} = & \\ f) \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2} + 2\right)} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = & \\ g) \left(\frac{3}{2}\right)^3 : \frac{15}{4} + \sqrt[3]{2 + \frac{11}{8}} - \frac{1}{6} = & \\ h) \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \sqrt{\frac{9}{4}} + \frac{27}{25} : \left(-\frac{9}{5}\right) - \frac{7}{15} = & \\ i) \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{4}{3} - \frac{20}{21} \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) \cdot \left(-\frac{7}{12}\right) + (-2)^{-1} = & \end{aligned}$$

Ejercicio N° 12: Notación Científica.

1- Escribir los siguientes números en Notación Científica

- a) 453000000000000
- b) 120100000000000000
- c) 0,000000000067

2- Pasar los números a notación científica y luego realizar los cálculos

- a) 1200000.450000

b) $(0,0000000034 \cdot 0,00001)^2$

3- Expresar en Notación Científica y calcular el valor de cada expresión

a) $\frac{a \cdot b}{2 \cdot c \cdot d}$ donde $\begin{cases} a = 6200000 \\ b = 0,00000000126 \\ c = 310000000 \\ d = 0,000000000063 \end{cases}$

b) $\frac{a \cdot b \cdot c}{d}$ donde $\begin{cases} a = 590 \\ b = 0,0004 \\ c = 0,02 \\ d = 20000 \end{cases}$

Ejercicio N° 13: Racionalizar los siguientes denominadores, según corresponda

a) $-\frac{4}{\sqrt[5]{7}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + 2}$ c) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ d) $\frac{8}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ e) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$

UNIDAD N° 2

Polinomios en una variable.

Los polinomios son objetos muy frecuentes en todas las ciencias que utilizan a la matemática como herramienta. Las ecuaciones y funciones que involucran polinomios tienen aplicaciones en una gran variedad de problemas, y entre ellas el contexto de las ciencias económicas no es ajena.

Las expresiones algebraicas denominadas polinomios en una sola variable (es decir, un valor que puede ir cambiando), tienen la siguiente forma:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

Donde: $a_0; a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$ son números Reales llamados **coeficientes**. La “ x ” es la variable, **el exponente de la variable siempre debe ser un número Natural**.

Ejemplo de Polinomios:

$$A(x) = 3x^6 - 100$$

$$B(x) = 2x^5 - 7x^3 + x^2 - 35$$

$$C(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 + 2x^2 - 10x + 20$$

El polinomio $A(x)$ tiene dos términos, sus coeficientes son: 3 y -100.

El polinomio $B(x)$ tiene cuatro términos, sus coeficientes son: 2; -7, 1 (cuando no figura) y -35.

El polinomio $C(x)$ tiene seis términos, sus coeficientes son: 1; -5, 10; 2; -10 y 20.

Según la cantidad de términos un polinomio recibe nombres especiales:

Monomio: tiene un solo término.

Binomio: tiene dos términos.

Trinomio: tiene tres términos.

Cuatrinomio: tiene cuatro términos.

Ejemplo: El polinomio $A(x)$ es un binomio, el polinomio $B(x)$ es un cuatrinomio y el polinomio $C(x)$ tiene 6 términos ya a esta cantidad de términos no se los designan con nombres especiales, sólo hasta los de cuatro términos.

Características de los Polinomios

Los polinomios presentan ciertas características que las identificamos de la siguiente manera.

- **Grado:** lo indica el mayor exponente de la variable “ x ”.
- **Coeficiente Principal:** es el coeficiente del término que indica el grado.
- **Término Independiente:** es el coeficiente del término que no tiene “ x ”, es decir tiene grado 0; ya que $x^0 = 1$ y, por lo tanto, la variable “desaparece” en dicho término.
- **Polinomio Mónico:** cuando el coeficiente principal es igual a 1.

Ejemplo: Buscamos las características de los polinomios indicados a continuación.

$$A(x) = 3x^6 - 100$$

- Grado: 6°
- Coeficiente Principal: 3
- Término Independiente: -100
- Polinomio Mónico: No es.

Polinomios Completos y Ordenados

Un polinomio está **completo** cuando aparecen todos los términos desde el de mayor grado hasta el de grado 0, los términos faltantes en un polinomio son porque sus coeficientes son 0. Es por ello que, al completar un polinomio, los términos que queremos hacer visibles los pondremos con coeficientes 0.

Un polinomio se puede **ordenar** de forma creciente o decreciente respetando el orden de los grados de cada término.

Ejemplo: Dado el polinomio $B(x) = 2x^5 - 7x^3 + x^2 - 35$

Vemos que está ordenado, ya que los términos van desde el grado 5 al 0 de la siguiente manera: 5; 3; 2 y 0

Pero no está completo, faltan los términos de grado 4 y 1, lo agregamos con coeficiente 0, entonces quedaría de la siguiente manera:

$$B(x) = 2x^5 + 0x^4 - 7x^3 + x^2 + 0x$$

– 35 ahora está completo y ordenado.

Especialización de Polinomios

Especializar un polinomio es asignar un valor determinado a la variable “x” y posteriormente resolver el ejercicio combinado que resulta de esta sustitución, encontrando el valor del polinomio para ese valor elegido particularmente.

Ejemplo: Dado $A(x) = 3x^2 + x^3 - x^4 - 7$, hallar el valor del polinomio cuando:

a) $x = 2$

Resolución:

$$A(2) = 3 \cdot (2)^2 + (2)^3 - (2)^4 - 7$$

$$A(2) = 3 \cdot 4 + 8 - 16 - 7$$

$$A(2) = 12 + 8 - 16 - 7$$

$$A(2) = 20 - 23$$

$$A(2) = -3$$

b) $x = -1$

Resolución:

$$A(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + (-1)^3 - (-1)^4 - 7$$

$$A(-1) = 3 \cdot (+1) + (-1) - (+1) - 7$$

$$A(-1) = 3 - 1 - 1 - 7$$

$$A(-1) = 3 - 9$$

$$A(-1) = -6$$

Operaciones con Polinomios

Sumas de Polinomios:

Para sumar dos o más polinomios debemos resolver los términos semejantes, es decir los que tienen igual grado, para ello podemos seguir estos pasos:

- 1) Ordenar y completar el primer polinomio.

- 2) Ordenar el segundo polinomio debajo del primero, respetando columnas de iguales potencias de la variable “x”.
- 3) Posteriormente se resuelven los coeficientes de cada columna y se conservan la parte literal.

Ejemplo: $A(x) = 2x^2 + x^3 - 9$ y $B(x) = x^4 + 2x^2 - 4x + 3$

Sumar los polinomios:

$$A(x) = 0x^4 + x^3 + 2x^2 + 0x - 9$$

$$B(x) = x^4 + 0x^3 + 2x^2 - 4x + 3$$

$$A(x) + B(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 - 4x - 6$$

Ejemplo: $C(x) = x^3 - 5x^4 - 9x + 2x^2$ y $D(x) = x^2 - 4x - 2x^3 - 5$

Sumar los polinomios:

$$C(x) = -5x^4 + x^3 + 2x^2 - 9x + 0$$

$$D(x) = 0x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x - 5$$

$$C(x) + D(x) = -5x^4 - x^3 + 3x^2 - 9x - 5$$

Restas de Polinomios:

Para restar dos o más polinomios debemos resolver los términos semejantes, es decir los que tienen igual grado, para ello podemos seguir estos pasos:

- 1) Ordenar y completar el primer polinomio.
- 2) Ordenar el segundo polinomio debajo del primero, respetando columnas de iguales potencias de la variable “x”, **pero debemos cambiar de signo a cada término.**
- 3) Posteriormente se resuelven los coeficientes de cada columna y se conservan la parte literal.

Ejemplo: $A(x) = 2x^2 + x^3 - 9$ y $B(x) = x^4 + 2x^2 - 4x + 3$

Restar los polinomios:

$$A(x) = 0x^4 + x^3 + 2x^2 + 0x - 9$$

$$B(x) = -x^4 - 0x^3 - 2x^2 + 4x - 3$$

$$A(x) - B(x) = -x^4 + x^3 + 0x^2 + 4x - 12$$

Multipliación de Polinomios.

Otra de las operaciones que podemos realizar con los polinomios, son las multiplicaciones, para ello se deben multiplicar cada término de un polinomio por cada término del otro. Cuando se multiplican dos términos que tienen “x” debemos recordar que podemos aplicar la regla de la multiplicación de potencia de igual base, donde se suman los exponentes, mientras con coeficientes se multiplican normalmente; para finalizar debemos resolver los términos semejantes.

Ejemplo 1: monomio por monomio:

$$(5x^3).(-3x^2) = -15x^5$$

Ejemplo 2: polinomio por monomio, puedo aplicar la propiedad distributiva:

$$(5x^2 + x - 3).(5x) = 5x^2.5x + x.5x - 3.5x = 25x^3 + 5x^2 - 15x$$

Ejemplo 3: polinomio por polinomio:

$$(-3x^3 + 4x^4 - 2x).(3x - 2) =$$

Para este ejemplo seguiremos los pasos que a continuación se indican:

1. Disponemos los polinomios uno debajo del otro, el de arriba “completo y ordenado” y el de abajo solamente “ordenado”.
2. Se multiplica el último término del segundo polinomio (-2) por cada término del primero y los resultados se escriben abajo.
3. Se multiplica el anteúltimo término del segundo polinomio (3x) por cada término del primero y los resultados se escriben abajo, pero formando columnas con iguales potencias de “x”. En este caso se empiezan a sumar los exponentes de las “x”, cuando se tenga que multiplicar dos términos con “x”.
4. Se resuelven las sumas o restas de términos semejantes, que quedaron formadas por las columnas del punto 3.

Resolución:

$$\begin{array}{r}
 4x^4 - 3x^3 + 0x^2 - 2x + 0 \\
 3x - 2 \\
 \hline
 -8x^4 + 6x^3 - 0x^2 + 4x - 0 \\
 12x^5 - 9x^4 + 0x^3 - 6x^2 + 0x \\
 \hline
 12x^5 - 17x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 4x - 0
 \end{array}$$

División de Polinomios

Método del Algoritmo.

Vamos a dividir $P(x) = x - 5x^5 + 2x^3 + 8$ por $Q(x) = x^3 - 2x$

Recordemos que $P(x)$ será el dividendo y $Q(x)$ el divisor, encontraremos al cociente $C(x)$ y al resto $R(x)$. Con esta regla se pueden resolver todas las divisiones de polinomios, solo basta que el grado del dividendo sea mayor o igual al grado del divisor.

Debemos realizar los siguientes pasos:

- Disponer al dividendo $P(x)$ completo y ordenado y al divisor $Q(x)$ solamente ordenado.
- Buscamos el 1er término del cociente $C(x)$, dividiendo el 1er término del dividendo por el 1er término del divisor.
- Luego multiplicamos este término del cociente por cada término del divisor y colocamos debajo del dividendo formando columna de iguales potencia de “ x ”.
- Realizamos la resta, y el paso se vuelve a repetir.
- Se finaliza la división cuando el Resto $R(x)$ es de menor grado que el divisor $Q(x)$.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r}
 -5x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 + x + 8 \quad | \quad x^3 - 2x \\
 \hline
 +5x^5 \quad -10x^3 \quad -5x^2 - 8 \\
 \hline
 -8x^3 + 0x^2 + x + 8 \\
 \hline
 +8x^3 \quad -16x \\
 \hline
 -15x + 8
 \end{array}$$

C.A

$$\frac{-5x^5}{x^3} = -5x^2$$

$$\frac{-8x^3}{x^3} = -8$$

Método de Ruffini

Vamos a dividir $P(x) = x - 2x^5 + 5x^3 + 8$ por $Q(x) = x - 2$

La regla de Ruffini es un método sencillo para dividir un polinomio dividendo cualquiera por un polinomio divisor que debe ser mónico y de grado 1, es decir, un polinomio de la forma $x-a$.

Debemos realizar los siguientes pasos:

- Ordenamos y completamos el polinomio dividendo $P(x)$
- Ubicamos los coeficientes de $P(x)$ y el término independiente del divisor $Q(x)$ cambiado de signo.
- El primer coeficiente del dividendo baja y luego se multiplica por el término independiente del divisor cambiado de signo y se coloca debajo del segundo coeficiente del dividendo, posteriormente ambos se suman.
- Se repite el proceso hasta finalizar.
- El último casillero corresponde al Resto $R(x)$ y los anteriores son los coeficientes del cociente $C(x)$.

Término independiente del divisor, cambiado de signo.

-2	0	5	0	1	8	→
2	-4	-8	-6	-12	-22	
x	-2	-4	-3	-6	-11	-14

$C(x) = -2x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 6x - 11$
 $R(x) = -14$

Coeficientes del dividendo, completo y ordenado

Teorema del Resto o del Residuo de la división de polinomios.

Este teorema nos permite conocer el resto de la división de un polinomio por otro de la forma $(x + a)$, el mismo es el valor numérico del polinomio dividido para $x = -a$

Ejemplo: Vamos a calcular el Resto que resulta de dividir:

$$P(x) = x - 2x^5 + 5x^3 + 8 \quad \text{por} \quad Q(x) = x - 2$$

Aplicando el teorema del resto, hacemos:

$$P(x) = 2 - 2 \cdot 2^5 + 5 \cdot 2^3 + 8 = 2 - 64 + 40 + 8 = -14$$

Entonces el resto será: $R(x) = -14$

Polinomios divisibles.

El polinomio $P(x)$ es divisible por $Q(x)$ si y solo si al realizar la división de $P(x)$ por $Q(x)$ se obtiene un resto igual a 0, es decir $R(x) = 0$

Teorema del factor.

Dado $Q(x) = x - a$ es factor de $P(x)$ si y solo si, $P(a) = 0$. Un polinomio es factor de otro, si puede expresarse este segundo como multiplicación del primero y otro u otros polinomios.

Si se cumple el teorema precedente puede factorizarse $P(x)$ aplicando la siguiente regla:

$P(x) = Q(x)C(x)$ podemos observar que $P(x)$ está expresado como la multiplicación de dos polinomios.

Recordamos el concepto de factorizar un polinomio.

“Factorizar un polinomio, es expresarlo como una multiplicación de otros polinomios”.

$P(x) = A(x)B(x)$ en este caso el polinomio $P(x)$ está factorizado

Método del factor común.

Este método consiste en identificar cuando una misma cantidad (número o letra) se encuentra en todos los términos de un polinomio, ese es el factor común. En el caso de la letra se toma siempre la que posea el menor exponente y el número debe poder dividir a todos los coeficientes del polinomio. Una vez elegido el factor común, se divide cada

término del polinomio por el factor común (en un cálculo auxiliar). El polinomio factorizado se expresa como la multiplicación del factor común y los resultados de las divisiones.

Ejemplo: Extraer Factor Común de $P(x)$

$$P(x) = 2x^3 - 8x^4 + 18x^2$$

$$P(x) = 2x^2 \cdot (x - 4x^2 + 9)$$

Cálculo Auxiliar.

$$\frac{2x^3}{2x^2} = x \quad \frac{-8x^4}{2x^2} = -4x^2 \quad \frac{18x^2}{2x^2} = 9$$

Método del factor común por grupos.

En muchos casos no existe un factor común para todos los términos de un polinomio, pero si este polinomio presenta ciertas características se puede hacer la extracción del factor común por grupos.

Los pasos a seguir son:

- Dividir el polinomio en grupos que tengan la misma cantidad de términos.
- Sacar factor común en cada grupo.
- Finalmente aparece un nuevo factor común que figura en cada grupo, y se procede a extraerlo.

Ejemplo: Factorear $P(x)$.

$$P(x) = x^3 - 8x^2 + 2x - 16$$

dividimos el polinomio en dos grupos de dos terminos.

$$P(x) = [x^3 - 8x^2] + [2x - 16]$$

sacamos factor común en cada grupo.

$$P(x) = x^2 \cdot [x - 8] + 2 \cdot [x - 8]$$

cada término figura $(x - 8)$ lo sacamos como un nuevo factor común.

$$P(x) = [x - 8] \cdot [x + 2]$$

Cálculos Auxiliares.

$$\frac{x^3}{x^2} = x \quad \frac{-8x^2}{x^2} = -8 \quad \frac{2x}{2} = 2 \quad \frac{16}{2} = 8 \text{ factor común en cada grupo}$$

Método de Diferencia de cuadrados.

Para aplicar este caso el polinomio debe ser una resta de dos términos, y cada término debe poder expresarse como cuadrados, luego se aplica la siguiente regla:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Ejemplo:

$$P(x) = x^2 - 25$$

expreso cada término como cuadrados

$$P(x) = (x)^2 - (5)^2$$

aplico la regla

$$P(x) = (x + 5) \cdot (x - 5)$$

Ejemplo:

$$P(x) = x^6 - 100$$

expreso cada término como cuadrados

$$P(x) = (x^3)^2 - (10)^2$$

aplico la regla

$$P(x) = (x^3 + 10) \cdot (x^3 - 10)$$

Método del Trinomio Cuadrado Perfecto.

Si el polinomio que queremos factorizar tiene la forma $a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$ entonces se denomina trinomio cuadrado perfecto, ya que proviene de desarrollar el cuadrado de un binomio $(a \pm b)^2$, lo cual representa a la factorización del polinomio dado, es decir que $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$ y $(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b)$

Ejemplo: desarrollar cuadrados de binomio.

- $(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
- $(5x - 4)^2 = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 4 + 4^2 = 25x^2 - 40x + 16$

Para aplicar el método del Trinomio Cuadrado Perfecto, la idea es reconocer dos términos que sean cuadrados de ciertas cantidades y, verificar que el término restante sea el doble producto de esas cantidades.

Por ejemplo, en el polinomio $x^2 + 10x + 25$ podemos observar dos términos que son cuadrados de ciertas cantidades, ellos son “x” y “5” (cuyos cuadrados son x^2 y 25). Además, si hacemos el doble producto de esas cantidades obtenemos $2 \cdot x \cdot 5 = 10x$, que coincide con el término restante, entonces el polinomio dado es un trinomio cuadrado perfecto y se lo factoriza de la siguiente manera:

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

Ejemplo: Aplicar Trinomio Cuadrado Perfecto

$$P(x) = 4x^4 + 12x^2 + 9$$

Vemos que $2x^2$ y 3 tienen por cuadrados a $4x^4$ y 9 respectivamente y que $2 \cdot 2x^2 \cdot 3 = 12x^2$, por lo cual se cumple que $P(x)$ es un trinomio cuadrado perfecto. Por lo tanto:

$$P(x) = 4x^4 + 12x^2 + 9 = (2x^2 + 3)^2$$

Expresiones Racionales.

Una expresión racional es una expresión algebraica que representa al cociente de dos polinomios, es decir presenta la forma de $\frac{P(x)}{Q(x)}$, esta expresión tiene sentido para todos los valores de “x” tales que $Q(x) \neq 0$, ya que el denominador no puede ser igual a 0. Los valores que anulan al denominador son los valores no permitidos y son los que imponen las restricciones para la misma.

Dominio.

El dominio de una expresión algebraica es el conjunto de todos los valores permitidos, es decir aquellos que no anulan al denominador.

Ejemplo:

Dada la expresión racional $\frac{2x^3+1}{x-5}$ podemos ver que el denominador se anula cuando “x” vale 5, es por ello que no pertenece al dominio.

El dominio serían los valores de la variable que pertenecen al conjunto $R - \{5\}$

Simplificación de Expresiones Racionales

En muchos casos es importante poder realizar las simplificaciones antes de realizar las operaciones, ya que estaríamos trabajando con expresiones equivalentes más simples.

Para realizar las simplificaciones, se deben factorizar los numeradores y denominadores de la expresión racional y simplificar los factores comunes que aparecen simultáneamente en el numerador y denominador.

Ejemplo: Simplificar la siguiente expresión racional.

$$\frac{x^2 - 4}{3x + 6}$$

Se procede a factorizar el numerador y denominador

$$\frac{x^2 - 4}{3x + 6} = \frac{(x + 2) \cdot (x - 2)}{3(x + 2)}$$

Luego se identifican y simplifican los términos iguales.

$$\frac{x^2 - 4}{3x + 6} = \frac{(x + 2) \cdot (x - 2)}{3(x + 2)} = \frac{(x - 2)}{3}$$

Importante: el dominio de la expresión debe identificarse antes de realizar las simplificaciones.

Operaciones con Expresiones Racionales

Para operar con fracciones algebraicas se procede de la misma forma que para las fracciones numéricas. Cualquier operación resultará más sencilla si antes de efectuarla se simplifican las fracciones algebraicas involucradas.

- **Suma (o Resta)** de expresiones algebraicas con el mismo denominador, es otra expresión algebraica cuyo denominador es el mismo y el numerador es la suma (o resta) de los numeradores. Si tienen denominador distinto, primero se las transforma en fracciones con denominador común (para lo cual es conveniente factorizar los denominadores), y luego se efectúa la suma o resta.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

Ejemplo: Realizar las operaciones indicadas.

- $\frac{3}{x+2} - \frac{4x-6}{x+2} = \frac{3-(4x-6)}{x+2} = \frac{3-4x+6}{x+2} = \frac{-4x+9}{x+2}$
- $\frac{4}{x+2} + \frac{2x}{x-3} = \frac{4 \cdot (x-3) + 2x \cdot (x+2)}{(x+2) \cdot (x-3)} = \frac{4x-12+2x^2+4x}{(x+2) \cdot (x-3)} = \frac{2x^2+8x-12}{(x+2) \cdot (x-3)}$
- **Producto o multiplicación** de expresiones algebraicas es otra expresión cuyo numerador es el producto de los numeradores, y cuyo denominador es el producto de los denominadores. Es recomendable realizar las simplificaciones pertinentes antes de realizar la multiplicación.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Ejemplo: Realizar el producto indicado

$$\frac{x-2}{x^2-4x+4} \cdot \frac{x^2-2x}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x-2)^2} \cdot \frac{x \cdot (x-2)}{(x+2) \cdot (x-2)} = \frac{x}{(x+2) \cdot (x-2)}$$

- **Cociente o división** de dos expresiones algebraicas es el producto de la primera por el inverso o recíproco de la segunda.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Ejemplo: Realizar la división entre las expresiones algebraicas.

$$\frac{5}{x-2} : \frac{x}{x^2-4} = \frac{5}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{x} = \frac{5}{x-2} \cdot \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{x} = \frac{5(x+2)}{x}$$

Ecuaciones.

El Álgebra comienza, en realidad, cuando los matemáticos empiezan a interesarse por las operaciones que se pueden hacer con cualquier número, más que por los números mismos. Ese cualquier número se representa con una letra y se da, así, el paso de la Aritmética al Álgebra.

En un principio, las operaciones generales con números cualesquiera se describían con un montón de palabras:

¿Cuánto vale la cosa que, si se triplica y se la añade diez, vale el cuadrado de la cosa?

Hacia el siglo XVII los matemáticos ya se habían dado cuenta que sería mejor tener símbolos para la cosa buscada, es decir, para la incógnita (x) y para los números que intervenían en las ecuaciones cuando no importaba qué números concretos debían ser.

En esa época, el problema anterior ya se había expresado así:

¿Cuánto es x si $3x + 10 = 2x$?

Así queda planteada una expresión denominada ecuación. La palabra ecuación viene del latín *aequare* que significa igualar.

Fuente: De Guzmán, M., Cólera, J. y Salvador, A. (1987, p.68).

Definición

Una ecuación es una **igualdad** matemática entre dos expresiones, denominadas miembros y separadas por el signo igual ($=$), en las que figuran elementos conocidos (números, constantes o coeficientes) y datos desconocidos o incógnitas (representadas por letras, generalmente la " x ") y relacionadas por operaciones matemáticas.

Ejemplo:

$$2x + 3 = 5x - (3x + 9) + 7$$

Solución de una ecuación

Se llama solución de una ecuación al valor o los valores que, asignados individualmente a las incógnitas en una ecuación, hacen que la igualdad se cumpla, la hacen verdadera, en definitiva: la verifican.

Es el valor de incógnita para el cual la igualdad es verdadera. El conjunto solución de una ecuación es el conjunto de todas las soluciones.

Ejemplo: $x = 2$ es solución de la ecuación $5x - 4 = 2x + 2$

Verificación:

$$5x - 4 = 2x + 2$$

$$5.2 - 4 = 2.2 + 2$$

$$10 - 4 = 4 + 2$$

$$6 = 6$$

Resolución de una ecuación

Resolver una ecuación es encontrar el valor de la variable o incógnita, la cual como se dijo anteriormente verifica la igualdad. Para ello se debe despejar la incógnita, aplicando ciertas propiedades de la matemática.

Ejemplo: Resolución de una ecuación lineal.

$(3x - 1) \cdot 12 - (-x + 2) = 5 \cdot (2x + 1)$ aplicamos las distributivas.

$36x - 12 + x - 2 = 10x + 10$ agrupamos términos semejantes operando miembro a miembro por los opuestos correspondientes.

$36x - 12 + 12 + x - 2 + 2 - 10x = 10x - 10x + 10 + 12 + 2$ simplificamos.

$36x + x - 10x = 10 + 12 + 2$ resolvemos términos semejantes.

$27x = 24$ despejamos la variable multiplicando miembro a miembro por el recíproco correspondiente.

$\frac{27}{27}x = \frac{24}{27}$ simplificamos.

$x = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}$ resultado final.

Resoluciones de Ecuaciones Racionales

Al resolver una ecuación racional, debemos primeramente resolver o simplificar las expresiones que intervienen para llegar a tener una sola expresión racional en cada miembro, luego se procede a despejar la variable operando convenientemente.

Ejemplo: Resolver la ecuación racional.

$$\frac{3}{x+2} - \frac{4x-6}{x+2} = 3 \rightarrow \frac{3 - (4x-6)}{x+2} = 3$$

$$\frac{3 - 4x + 6}{x+2} = 3$$

$$\frac{-4x + 3}{x+2} = 3$$

$$-4x + 3 = 3 \cdot (x + 2)$$

$$-4x + 3 = 3x + 6$$

$$-4x - 3x = 6 - 3$$

$$-7x = 3 \rightarrow x = -\frac{3}{7}$$

Trabajo Practico N° 2

Ejercicio N° 1: Indicar cuales de las siguientes expresiones son polinomios y en los casos contrarios indicar que característica posee para no serlo.

a) $P(x) = x^3 + \frac{5}{4}x^2 + \sqrt{3}x + 0,034$

b) $Q(x) = x^3 + 5x^{-2} + \frac{12}{x^4}$

c) $S(x) = x^2 - \pi x^3 + 5x^5$

d) $T(x) = \frac{-35}{x^5 - 7x^3 + 5x^2 - 35}$

Ejercicio N° 2: Clasificar a las expresiones polinómicas del ejercicio anterior según la cantidad de términos que poseen.

Ejercicio N° 3: Indicar las características de los polinomios:

a) $B(x) = 2x^5 - 7x^3 + x^2 - 35$

b) $C(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 + 2x^2 - 10x + 20$

c) $D(x) = 4x - x^3 - 9x^2$

Ejercicio N° 4: Completar y ordenar los polinomios.

a) $D(x) = -6x^3 + 2 - 3x$

b) $E(x) = 7x^3 + x^4 - 3$

c) $F(x) = 3x + 2x^3$

Ejercicio N° 5: Dados los polinomios $B(x) = 2x^2 + x^3$ y $C(x) = x^4 + 2x^2 - 4x + 3$ Calcular:

a) $B(-2)$

b) $C(-3)$

Ejercicio N° 6: Resolver las sumas con los siguientes polinomios.

$$P(x) = 5x^4 + x^2 - 6x + 3 \quad Q(x) = -2x^4 - x + 4 \quad R(x) = x^3 + x^2 - 7x$$

- a) $P(x) + Q(x)$
- b) $Q(x) + R(x)$
- c) $R(x) + P(x)$

Ejercicio N° 7: Resolver las restas con los siguientes polinomios.

$$P(x) = 5x^4 + x^2 - 6x + 3 \quad Q(x) = -2x^4 - x + 4 \quad R(x) = 2x^3 + x^2 - 7x$$

- a) $P(x) - Q(x)$
- b) $Q(x) - R(x)$
- c) $R(x) - P(x)$

Ejercicio N° 8: Resolver las siguientes multiplicaciones.

- a) $(2x^3 - 8x^2 + 1) \cdot (-2x^4) =$
- b) $(3x^4 - 4x^3 + 2x - 5) \cdot (-x^2 + 5) =$
- c) $(x^2 + 7x + 8) \cdot (2x^3 - 3x) =$

Ejercicio N° 9: Realizar las divisiones, aplicando el método de Algoritmo.

- a) $(5x^4 + x^2 - 6x + 3) : (x - 2) =$
- b) $(5x^4 + x^2 - 6x + 3) : (x^2 - 2x) =$
- c) $(-2x^2 + x^3) : (x^2 + 2) =$
- d) $(-2x^2 + x^3) : (x + 3) =$

Ejercicio N° 10: Resolver las divisiones del Ejercicio N° 9, siempre que sean posibles.

Ejercicio N° 11: Hallar el resto de la división entre los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$

- a) $P(x) = x^5 - 4x$ y $Q(x) = x + 1$
- b) $P(x) = x^2 - 2x + 4$ y $Q(x) = x - 2$
- c) $P(x) = x^3 - 8$ y $Q(x) = x - 2$

Ejercicio N° 12: Decida en cada caso si $P(x)$ es divisible por $Q(x)$

Ejercicio N° 13: Aplique el Teorema del factor en los casos anteriores, siempre que sea posible.

Ejercicio N° 14: Extraer el factor común de los siguientes polinomios.

- a) $A(x) = 15x^3 + 5x^7 - 35x^5$
- b) $B(x) = x^3 - 7x^4 + 3x^2$
- c) $C(x) = -2x^5 - 10x^4 + 20x^2 + 6x^3$

Ejercicio N° 15: Extraer el factor común por grupo de los siguientes polinomios.

- a) $A(x) = x^3 + 5x^2 + 3x + 15$
- b) $B(x) = x^5 - 7x^3 + 5x^2 - 35$
- c) $C(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 + 2x^2 - 10x + 20$

Ejercicio N° 16: Aplicar el caso de diferencia de cuadrados en los siguientes polinomios.

- a) $A(x) = x^2 - 49$
- b) $B(x) = 25x^2 - 4$
- c) $C(x) = x^4 - 36$

Ejercicio N° 17: Factorizar los polinomios aplicando Trinomio Cuadrado Perfecto

- a) $A(x) = x^4 - 8x^2 + 16$
- b) $B(x) = 25x^2 + 10x + 4$
- c) $C(x) = x^6 + 2x^3 + 1$

Ejercicio N° 18: Simplificar las siguientes expresiones.

- a) $\frac{x^2-25}{x+5} =$
- b) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4} =$
- c) $\frac{3x^2-12x}{x^2-16} =$

Ejercicio N° 19: Realizar las sumas o restas indicadas.

- a) $\frac{x^2-10}{x+5} - \frac{15}{x+5} =$
- b) $\frac{5}{x+2} + \frac{2x-4}{x^2-4} =$
- c) $\frac{x}{x-2} + \frac{6}{x+3} =$

Ejercicio N° 20: Realizar las multiplicaciones indicadas, previamente simplificar.

- a) $\frac{x^2-9}{x} \cdot \frac{x^2+3x}{x-3} =$
- b) $\frac{5x-25}{x^4-16} \cdot \frac{x^2+4}{x-5} =$
- c) $\frac{9x^2-4}{x^3} \cdot \frac{x^2-x}{9x-6} \cdot \frac{x^3-2x^2}{x-2} =$

Ejercicio N° 21: Realizar los cocientes indicados.

- a) $\frac{x^2}{x+3} : \frac{x}{x^2+3x} =$
- b) $\frac{x^2+6x+9}{x-2} : \frac{x+3}{4x-8} =$
- c) $\frac{5x+5}{x^2-1} : \frac{5}{x^2-2x+1} =$

Ejercicio N° 22: Resolver y verificar las siguientes ecuaciones.

- a) $2x + 28 = 10 - x$
- b) $4x - 3 = x + 15 : 3$
- c) $74 - 2,5x = 5x - 1$
- d) $4x + 3 - x + 2x = -8 + 6$
- e) $3 \cdot (2x + 4) = 4 \cdot (1 - x)$
- f) $-(x - 1) + (x + 1) = -x + 1$
- g) $12x - (-13) + 5x = 13x - 2$
- h) $6x - 2 \cdot (x - 14) + (12) - 1 = 4x - (-13)$
- i) $3x - (-12x + 1) = -x + 35$

Ejercicio N° 23: Resolver las siguientes ecuaciones.

- a) $\frac{x^2-10}{x+5} - \frac{15}{x+5} = x$
- b) $\frac{5}{x+2} + \frac{2x-4}{x^2-4} = 0$
- c) $\frac{x^2-9}{x} \cdot \frac{x^2+3x}{x-3} = 0$
- d) $\frac{x^2}{x+3} : \frac{x}{x^2+3x} = 9$

e) $\frac{x^2+6x+9}{x-2} : \frac{x+3}{4x-8} = 8$

Ejercicio N° 24: Resolver las siguientes ecuaciones

I. $3x - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = -x + \frac{3}{5}$

II. $(3x - 1) \cdot \frac{1}{2} - (-x + 2) = 5(2x + 1)$

III. $\sqrt{\frac{1}{2}x + 1} - 5 = 6$

IV. $\sqrt{3x - \frac{1}{2}} = -2$

V. $9x^2 + \sqrt{\frac{4}{9}} - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{67}{6}$